基礎物理学B演習 4類b組 第4回問題

【1】《同軸円筒状コンデンサー》

図1のように半径 a 長さ l の円柱状導体と長さが同じで内半径 b の円筒状導体とを中心軸が一致するように配置して作ったコンデンサーを考える．ただし，導体間の距離 $b-a$ は導体の長さに比べて十分小さく，電場は導体に挟まれた空間にのみ存在するものとしてよい．

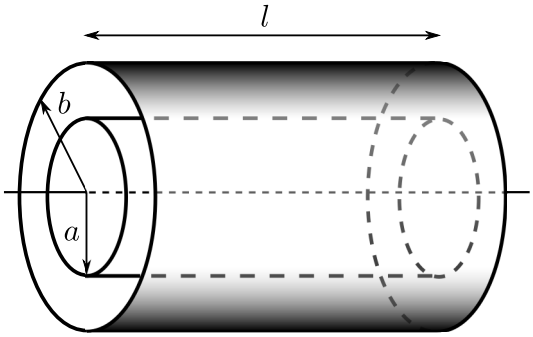

図 1: 同軸円筒状コンデンサー

(i) 円柱状導体に電荷 $Q\ (>0)$ を与え，円筒状導体に $-Q$ の電荷を与えたとする．十分な時間が経過して系が平衡状態に達した時，電荷は一様に分布しているものとしてよい．

このときの電場の向きを物理的考察により求めよ．さらに，導体間の各点における電場の大きさを Gauss の法則を用いて求めよ．

(ii) 前問 (i) の結果を利用して，導体間の電位差 $\Delta\phi$ を求めよ．さらに，その結果からこのコンデンサーの電気容量 C を求めよ．

(iii) (i) で求めた電場を用いて静電エネルギー $U=(\varepsilon_0/2)\iiint \boldsymbol{E}^2\,dV$ を計算し，これが $Q\Delta\phi/2$ と一致する事を示せ．

【2】《勾配 (gradient) と発散 (divergence) の計算》

位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と表す．このとき，以下の式を計算しなさい．ただし，$r\equiv\|\boldsymbol{r}\|$ とする．

(i) $\mathrm{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right)\equiv\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\qquad(r\neq 0)$

(ii) $\mathrm{div}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\equiv\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\qquad(r\neq 0)$

(iii) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{r}$．ただし，$\nabla$ のデカルト直交座標表示を用いること．

(iv) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{r}$．ただし，$\nabla$ の極座標表示を用いること．
さらに，ここで得られた結果を前問 (iii) のそれと比較しなさい．

【3】《Gauss の発散定理》

位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と表す．領域 V として原点を中心とする半径 R の球を考えたとき，Gauss の発散定理

$$\oint_{\partial V}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{r}\,dV \tag{1}$$

が成り立つことを以下の手順に従って確認しなさい.

(i) 式 (1) の左辺を計算するためにまず微小面積ベクトル $d\boldsymbol{S}$ について考察を加える．3 次元球座標系 (r, θ, φ) を取ると，球面上の点 (R, θ, φ) における微小面積ベクトルが

$$d\boldsymbol{S} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \boldsymbol{e}_r \tag{2}$$

と書けることを確認しなさい．ただし，$\boldsymbol{e}_r$ は動径方向の単位ベクトルを表す.

(ii) 球面上の点 (R, θ, φ) を表す位置ベクトルと微小面積ベクトルとの内積を求め，式 (1) の左辺の面積分を計算しなさい.

注意: (R, θ, φ) は位置ベクトルの成分を表しているわけではない.

ヒント: 球面上 (∂V 上) での積分を行うには，被積分関数を θ に関して 0 から π まで積分し，φ に関して 0 から 2π まで積分すればよい.

(iii) 式 (1) の右辺を計算し，その結果が前問 (ii) の結果と一致する事を確かめよ.