



基礎物理学B演習 4類b組 第1回問題

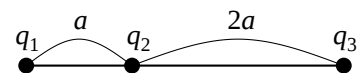
2012年10月3日(水)

- 【1】(i) 2つの電子間に働く Coulomb 力と万有引力とを比較せよ。ただし、真空中の Coulomb 力の比例定数は $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ 、万有引力定数は $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 、電子の質量は $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、電子の電荷は $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ である。

() 電子間の距離が書かれていないが...

(ii) 1円玉はアルミニウム製で質量は約 1g あり、アルミニウム (原子番号 13, 原子量 27.0) 1g には 2.90×10^{23} 個の電子が含まれる。いま2枚の1円玉を 1m 離して置いたとする。もし片方の1円玉に含まれる電子のうち 1% がもう片方の1円玉に移動したとすると、2枚の間に働く Coulomb 力の大きさはどれだけになるか。また、その力は地球上で何 kg の重量を持ち上げる力に相当するか。1円玉の質量と2枚の間の距離はそれぞれ厳密に 1g, 1m としよ。

- 【2】一直線上に電荷 q_1, q_2, q_3 がこの順に並んでおり、 q_1 と q_2 の間の距離は a 、 q_2 と q_3 の間の距離は $2a$ である。



- (i) 各電荷に働く力を求めよ。
 (ii) 3つの電荷が平衡にあるためには q_1, q_2, q_3 をどのように選ばばよいか。
 (iii) (ii) まで解けた A 君と B 君は次のような疑問を持った。

A 君：(ii) で方程式が3本出てきて求めるべきは q_1, q_2, q_3 の3つであるのに、具体的値は求まらなかった。なぜだろうか。

B 君：(ii) で得られた方程式で $\tilde{q}_2 = q_2/q_1$, $\tilde{q}_3 = q_3/q_1$ とおくと、未知数は $\tilde{q}_2$ と $\tilde{q}_3$ の2つになる。方程式は3本あるから、未知数2つでは一般に解がないように思われるのだが、今の問題ではちゃんと解が求まった。これは偶然なのだろうか。

二人に明快な解説をお願いします。

- 【3】 $F(\mathbf{r}) = (x, y)$ であるとき、2つの経路

$C_1 : (0, 0) \Rightarrow (1, 1)$ の直線。

$C_2 : \text{放物線 } y = x^2 \text{ に沿って } (0, 0) \text{ から } (1, 1) \text{ へ}$

に沿った線積分

$$W_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad W_2 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

を計算したい。 $d\mathbf{l}$ の意味は $d\mathbf{l} = (dx, dy)$ である (つまり、接線方向の微小ベクトル)。

() 最も単純な場合には仕事 W が力 F と質点の移動距離 l との積 Fl であるの既に知っているはず。実際、地上付近で質点 m を h だけ持ち上げるときの仕事 mgh はおなじでみであろう。では、

力 F (ベクトル!) が場所によって異なっていたり質点 (など) が動く方向がいろいろ変わったりしたらどうするのか。例によって, 微小な動き dl に対しては力 F が変化しないと思って, 微小な仕事 $dW = F \cdot dl$ を積分すればよい。これが (1) の線積分の意味である。

(i) 2次元平面上の話だが, 積分は線に沿って行われるので本質的に1次元の積分である。具体的にはパラメーター表示を使うのが一番簡単である。パラメーター t が $0 \leq t \leq 1$ であるとして, C_1 はどのように表したらよいか

(ii) C_1 のパラメーター表示を使って $F \cdot dl$ をパラメーター t で表現せよ。

(iii)

$$W_1 = \int_{C_1} F \cdot dl \quad (2)$$

を求めよ。

(iv) (i) ~ (iii) と同様の方針で

$$W_2 = \int_{C_2} F \cdot dl \quad (3)$$

を求めよ。

(v) (i) の $F(r)$ の代わりに $G(r) = (y, 0)$ として, 2つの経路 C_1, C_2 に沿った線積分

$$W'_1 = \int_{C_1} G \cdot dl, \quad W'_2 = \int_{C_2} G \cdot dl \quad (4)$$

を計算せよ。