線形代数学第二 B 中間試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．**持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**．問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 1 月 24 日の授業の際に返却，そのあとは数学事務室 (本館 3 階 332B) におきます.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は，1 月 31 日の授業終了後 (12 時 30 分くらいまで) に申し出て頂くか，それまでに山田まで電子メイルでお申し出下さい．なお，管理の都合上，上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{11}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れ，下線 **a** ~ **b** の部分について後の問いに答えなさい． [35 点]

行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

は **a** <u>実対称行列</u> で，その固有多項式は $f_A(\lambda) = \boxed{1}$ と λ の $\boxed{2}$ 次式で表される．とくに A の固有値を絶対値が小さい順に並べると $\lambda_1 = \boxed{3}$, $\lambda_2 = \boxed{4}$, $\lambda_3 = \boxed{5}$, $\lambda_4 = \boxed{6}$ で

$$\boldsymbol{p}_1 = \boxed{7}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \boxed{8}, \qquad \boldsymbol{p}_3 = \boxed{9}, \qquad \boldsymbol{p}_4 = \boxed{10}.$$

とおくと，$\boldsymbol{p}_j$ は単位ベクトルで，かつ A の固有値 λ_j に関する固有ベクトルとなっている．とくに $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4]$ は **b** <u>直交行列</u> で，これを用いて行列 A は

$${}^tPAP = \boxed{11}$$

と対角化される．

問題 a 実対称行列 (a real symmetric matrix) の定義を述べなさい．

問題 b 2 次の直交行列をすべてあげなさい．

裏面につづく

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{9}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れ，下線 **a** ～ **b** の部分について後の問いに答えなさい． [40 点]

行列

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を表現行列にもつ線形写像

$$F\colon \boldsymbol{R}^{\boxed{1}} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto F(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\boxed{2}}$$

を考える．行列 B の階数 rank は $\boxed{3}$ であるから，線形写像 F の像 (image) $\operatorname{Im} F$ は $\boldsymbol{R}^{\boxed{4}}$ の $\boxed{5}$ 次元部分空間，**a** 核 (kernel) $\operatorname{Ker} F$ は $\boldsymbol{R}^{\boxed{6}}$ の **b** $\boxed{7}$ 次元部分空間である．いま $W = \operatorname{Ker} F$ とおき，$\boldsymbol{R}^{\boxed{6}}$ には標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとする．このとき，$\boxed{8}$ は W の正規直交基底 an orthonormal basis となる．これを用いれば，ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t[1, 1, 1, 1]$ の W への正射影 the orthogonal projection は $\boxed{9}$ となることがわかる．

問題 a 一般に，線形写像 $F\colon \boldsymbol{R}^{\boxed{1}} \to \boldsymbol{R}^{\boxed{2}}$ に対して $\operatorname{Ker} F$ は $\boldsymbol{R}^{\boxed{6}}$ の部分空間であることを示しなさい．

問題 b 一般に，線形写像 $F\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ の核 $\operatorname{Ker} F$ の次元と F の表現行列の階数 rank の間にはどのような関係があるか．

問題 C 次の行列 C に対して $D^4 = C$ となる，実数を成分とする対称行列をすべて求めなさい． [10 点]

$$C = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

問題 D 3 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ を座標空間とみなし，その中の座標原点 O を通る平面 Π をとっておく．このとき $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \overrightarrow{OQ}$ を対応させる写像 $f\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を考える．ただし，

Q は平面 Π に関して P と対称な点

である．このとき f は $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換となることがわかるが，その表現行列の固有値と重複度を求めなさい [10 点]．

問題 E 正の整数 m, n に対して n 次正方行列 A が $A^m = O$（零行列）を満たしているとする．このとき，[10 点]

(1) A の固有値を求めなさい．

(2) $A^n = O$ であることを示しなさい．

問題 F [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡

線形代数学第二 B 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–6:10 点，7–10:10 点, 11:5 点, 問題 a,b: 各 5 点

1	2	3	4	5	6
$\lambda(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-10)$	4	0	-2	4	10

7	8	9	10	11
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\12\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&10\end{bmatrix}$

問題 a

実数を成分とする正方行列 A で ${}^tA = A$ を満たすものを実対称行列という.

問題 b

$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$. ただし θ は実数.

問題 B の解答欄 配点：1–7:10 点，8,9:各 10 点, 問題 a,b: 各 5 点

1	2	3	4	5	6	7
4	3	2	3	2	4	2

8	9
$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{55}}\begin{bmatrix}1\\2\\-5\\5\end{bmatrix}\right\}$	$\frac{1}{11}\begin{bmatrix}5\\-1\\-3\\3\end{bmatrix}$

• 問題 A 1: 問題文にあてはまる必要がある．“$\det(A-\lambda I)$” は 4 次式であることが自明でないので “と” の部分にあてはまらない．また “$\ldots = 0$” は，固有方程式なのであてはまらない．• 問題 A, 3–6: “絶対値が小さい順” でないものがあったが，今回は減点しない．• 問題 A, 7–10: 単位ベクトル unit vector でないもの，固有値の順番と対応していないものは不正解．• 問題 A, 11: 対角成分が 3–6 の順番で対角行列になっていれば正解．• 問題 A, a: a_{ij} が未定義のまま “$a_{ij} = a_{ji}$” としたものは不正解．• 問題 A, b: すべてあげていないものは不正解．同じものをいくつもあげているものが多い．• 問題 B, 1: ここに 3 が入っているものは 1–7 を不正解とした．

学籍番号	氏　名

線形代数学第二 B 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 (つづき)

問題 a

$\operatorname{Ker} F = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \mid F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$ なので，$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} F$ であるための必要十分条件は $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$.

- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} F$ ならば $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ かつ $F(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}$. したがって F の線形性から $F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}) + F(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$. したがって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} F$.
- $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} F$, $t \in \boldsymbol{R}$ ならば $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ だから F の線形性から $F(t\boldsymbol{x}) = tF(\boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$. したがって $t\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} F$.

問題 b

F の表現行列を B とすると，

$$\dim \operatorname{Ker} F = m - \operatorname{rank} B.$$

問題 C の解答欄

$$\frac{\pm 1}{5\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

問題 D の解答欄

固有値: 1 (重複度 2), -1 (重複度 1).
実際，Π 上の点は F で動かないから，その点の位置ベクトルは固有値 1 の固有ベクトル.
原点を通り Π に直交する直線上の点は F で原点に関して対称な点にうつるから，その点の位置ベクトルは固有値 -1 の固有ベクトル.

学籍番号	氏　名

線形代数学第二 B 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 E の解答欄

(1)

A に対して，ユニタリ行列 U を $D := U^*AU$ が上三角行列になるようにとる．
このとき，D の対角成分 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が A の固有値である．
ここで $O = U^*A^mU = (U^*AnU)^n = D^m$ であるが，D^m の対角成分は $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$ なので，
$\underline{\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0}$ を得る．

(2)

A の固有値はすべて 0 なので，固有多項式は $f_A(\lambda) = \lambda^n$ となる．したがって，Cayley-Hamilton の定理より $A^n = O$.

学籍番号	氏　名

線形代数学第二 B 中間試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 F [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

問題 F の解答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表にしたがって着席してください．

- 2012 年度入学の方は，学籍番号のうち “12_” を除いた番号の席に着席してください．
- 2011 年度以前入学の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- 座席表の学籍番号のあとに*印のついている方は担当者に申し出てください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します：

(1) 受験者が着席していること
(2) 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること
(3) 私語がないこと．

なお，遅刻者への対応は遅れることがあります．ご了承ください．

試験中：

- 原則として終了時刻までは**退室禁止**です．やむを得ない場合は監督者に申し出て下さい．
- 試験中は私語や「前の人の椅子を蹴る」など他の受験者の邪魔になることはご遠慮ください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の最右端の壁際ら左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名