§4. (6.6) 二次形式

[二次形式] n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する実係数の同次 2 次式

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (a_{ji} = a_{ij})$$

を **二次形式**という．ここで $A = [a_{ij}]$, $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1\, x_2\, \cdots\, x_n]$ とおくと A は n 次実対称行列で,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$$

とも表せる．ここに現れる A を **二次形式の行列**という．

一般の n 変数の二次式 $F(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} 2b_i + c$ は

$$F(\boldsymbol{x}) = [x_1\ \cdots x_n\ 1]\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = [{}^t\boldsymbol{x}\ 1]\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A = [a_{ij}],\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

と表せる．また，$a_{i,n+1} = a_{n+1,i} = b_i$，$a_{n+1,n+1} = c$ とおけば $(n{+}1)$ 変数の二次形式
$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqq i<j\leqq n+1} 2a_{ij}x_ix_j$ において $x_{n+1} = 1$ としたものに等しい.

例 1 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2{+}2x_2^2{+}3x_3^2{-}2x_1x_2{-}4x_2x_3{+}8x_1x_3 = [x_1\, x_2\, x_3]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

$$f(x_1, x_2, 1) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 8x_1 - 4x_2 + 3 = F(x_1, x_2)$$

[二次形式の直交標準形] n 次実対称行列 A はある直交行列 U により

$$U^{-1}AU = {}^tUAU = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{bmatrix} = D \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ は } A \text{ の固有値で全て実数})$$

と対角化できるので ([3.2]'), $\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}$, $(\boldsymbol{y} = U^{-1}\boldsymbol{x} = {}^tU\boldsymbol{x},)$ $\boldsymbol{y} = {}^t[y_1\ \cdots\ y_n]$ と変数変換すれば

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(U\boldsymbol{y})A(U\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}\,{}^tUAU\,\boldsymbol{y} = [y_1 \cdots y_n]\begin{bmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \ (= {}^t\boldsymbol{y}D\boldsymbol{y}) = \alpha_1y_1^2 + \alpha_2y_2^2 + \cdots + \alpha_ny_n^2$$

最後の式を **二次形式 $f(\boldsymbol{x})$ の直交標準形** という．よって, 次が示された.

定理 (6.9) [4.1] 二次形式 $f(\boldsymbol{x})$ はある直交行列 U による変数変換 $\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}$ によって直交標準形にできる:

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \alpha_1y_1^2 + \alpha_2y_2^2 + \cdots + \alpha_ny_n^2 = g(\boldsymbol{y}) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ は } A \text{ の固有値})$$

固有値は任意の順に並べる事が出来るので，通常，固有値は正，負，零の順にまとめて次の様に表す.
正の固有値の個数を p, 負の固有値の個数を q (固有値 0 の重複度は $n-p-q$) とするとき,

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_p > 0, \quad \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+q} < 0, \quad \alpha_{p+q+1} = \cdots = \alpha_n = 0,$$
$$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{y}) = |\alpha_1|y_1^2 + \cdots + |\alpha_p|y_p^2 - |\alpha_{p+1}|y_{p+1}^2 - \cdots - |\alpha_{p+q}|y_{p+q}^2 \ \ (+0)$$

ここに現れる正と負の固有値の組 (p, q) を二次形式 $f(\boldsymbol{x})$ の**符号**（または **符号数**) という．$\mathrm{rank}\, A = p{+}q$ である.
(固有値 0 の重複度 $n{-}p{-}q$ は **退化次数** といわれる．)

例 2 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ の直交標準形を求める:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{とおくと} \quad f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = [x_1\, x_2\, x_3]\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

で，A の固有値は 6, 3, 0．A を対角化する直交行列 U として

$$U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とすれば} \quad {}^tUAU = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって二次形式 $f(\boldsymbol{x})$ は変数変換 $\boldsymbol{x}{=}U\boldsymbol{y}$ によって次の直交標準形に変形できる:

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}({}^tUAU)\boldsymbol{y} = 6y_1^2 + 3y_2^2$$

二次形式の直交標準型の応用

定理 [3.7] (固有値の最大，最小) 二次形式 $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ について,

(1) $\displaystyle\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2} = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = A$ の最大の固有値 (2) $\displaystyle\min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2} = \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = A$ の最小の固有値

証明 A の固有値を $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ と並べ, 直交行列 U で A を対角化する．$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}$ とするとき,

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \alpha_1y_1^2 + \alpha_2y_2^2 + \cdots + \alpha_ny_n^2. \quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \|U\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{y}\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \text{ より}$$
$$\alpha_1\|\boldsymbol{x}\|^2 = \alpha_1(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \leqq {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \leqq \alpha_n(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \alpha_n\|\boldsymbol{x}\|^2$$

特に ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|^2$ は，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 = {}^t[1, 0, \cdots, 0]$ とすれば最小値 α_1 を，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_n$ とすれば最大値 α_n をとる.

例 3 $x^2+y^2+z^2=1$ のもとで, 例 2 の $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$ の最大値, 最小値は固有値 $=6,3,0$ より, 最大値 $=6$. 最小値 $=0$ で, 最大値 6 は $\boldsymbol{x}=U\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{3}{}^t[2,1,2]$, 最小値 0 は $\boldsymbol{x}=U\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{3}{}^t[-2,2,1]$ のときにとる.

[二次形式の正則標準形] 次に正則行列 P による変数変換 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{z}$（**正則一次変換**という）により
二次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{z}{}^tPAP\boldsymbol{z}$, あるいは対称行列 ${}^tPAP$ をさらに簡単にすることを考える.
二次形式 $f(\boldsymbol{x})$ を直交行列 U により $\boldsymbol{x}=U\boldsymbol{y}$ と直交標準形 ([4.1]) に変換し，さらに

$$y_i=\frac{1}{\sqrt{|\alpha_i|}}z_i\ \ (\because\ |\alpha_i|y_i^2=z_i^2)\ \ (1\leqq i\leqq p+q),\quad y_i=z_i\ \ (p+q+1\leqq i\leqq n)$$

と変換すると (対角成分が $|\alpha_1|^{-\frac{1}{2}},\ldots,|\alpha_{p+q}|^{-\frac{1}{2}},1,\cdots,1$ の対角行列を D_1 とすれば $\boldsymbol{y}=D_1\boldsymbol{z}$ で)

$$(1)\qquad f(\boldsymbol{x})=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2=h(\boldsymbol{z})$$

となる．これを二次形式 $f(\boldsymbol{x})$ の **正則標準形** ということにする．正と負の項の個数の組 (p,q) は符号に一致する．
$h(\boldsymbol{z})$ の行列は, 1 が p 個，-1 が q 個，0 が $n-p-q$ 個対角成分に並ぶ対角行列 D' であり，${}^tD_1DD_1=D'$.
このとき $P=UD_1$ とすれば P は正則であり，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{z}$ と変換したことになる．即ち,

$$\boldsymbol{x}=U\boldsymbol{y}=U\begin{bmatrix}|\alpha_1|^{-\frac{1}{2}}&&\\&\ddots&\\&&|\alpha_{p+q}|^{-\frac{1}{2}}&\\&&&E_{n-p-q}\end{bmatrix}\boldsymbol{z}=UD_1\boldsymbol{z}=P\boldsymbol{z},\quad D_1=\begin{bmatrix}|\alpha_1|^{-\frac{1}{2}}&&\\&\ddots&\\&&|\alpha_{p+q}|^{-\frac{1}{2}}&\\&&&E_{n-p-q}\end{bmatrix},\quad P=UD_1$$

$$f(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{z}{}^tPAP\boldsymbol{z}={}^t\boldsymbol{z}{}^tD_1({}^tUAU)D_1\boldsymbol{z}={}^t\boldsymbol{z}{}^tD_1DD_1\boldsymbol{z}={}^t\boldsymbol{z}D'\boldsymbol{z}=h(\boldsymbol{z})$$

二次形式を正則標準形にする正則行列 P の取り方はこれ以外にもいろいろあるが，得られる標準形は P の取り方によらず一意的に定まることが示せる．即ち次が成り立つ.

定理 [4.2] (Sylvester(シルヴェスター）の慣性法則) 二次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の正則標準型は一意的に定まる．即ち，変数の正則一次変換の仕方によらず標準型における正と負の項の個数 p と q は一定であり, (p,q) は符号に一致する.

証明 上記の正則行列 $P=UD_1$ をとれば (p,q) は符号に一致することが分かる.
正則行列 P,Q による二通りの変数変換 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{z}$ によって二通りの正則標準型

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2\quad={}^t\boldsymbol{z}{}^tQAQ\boldsymbol{z}=z_1^2+\cdots+z_s^2-z_{s+1}^2-\cdots-z_{s+t}^2$$

になったとして $p=s$, $q=t$ を導くが，$\operatorname{rank}A=p+q=s+t$ より $p=s$ を示せば良い．$p>s$ と仮定して矛盾を導く:
$\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}=Q^{-1}\boldsymbol{x}$ より， P^{-1},Q^{-1} を行ベクトル $\boldsymbol{p}'^1,\ldots,\boldsymbol{p}'^n$, $\boldsymbol{q}'^1,\ldots,\boldsymbol{q}'^n$ に分割すれば $y_i=\boldsymbol{p}'^i\boldsymbol{x}$, $z_i=\boldsymbol{q}'^i\boldsymbol{x}$ と表せる．そこで $\boldsymbol{x}$ に対する同次連立一次方程式

$$(y_{p+1}=)\,\boldsymbol{p}'^{p+1}\boldsymbol{x}=0,\ \ldots,\ (y_n=)\,\boldsymbol{p}'^n\boldsymbol{x}=0,\quad (z_1=)\,\boldsymbol{q}'^1\boldsymbol{x}=0,\ \ldots,\ (z_s=)\,\boldsymbol{q}'^s\boldsymbol{x}=0\quad (n-p+s\ \text{個})$$

を考えると, 仮定 $p>s$ より 方程式の個数 $=n-p+s<n=$ 未知数の個数. よって自明でない解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ をもつ．即ち， $y_i=\boldsymbol{p}'^i\boldsymbol{a}=0$ $(p+1\leqq i\leqq n)$, $z_i=\boldsymbol{q}'^i\boldsymbol{a}=0$ $(1\leqq i\leqq s)$.

$$\boldsymbol{b}=P^{-1}\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}'^1\boldsymbol{a}\\\vdots\\\boldsymbol{p}'^p\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{p}'^{p+1}\boldsymbol{a}\\\vdots\\\boldsymbol{p}'^n\boldsymbol{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_p\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ (\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{b},)\quad \boldsymbol{c}=Q^{-1}\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}'^1\boldsymbol{a}\\\vdots\\\boldsymbol{q}'^s\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{q}'^{s+1}\boldsymbol{a}\\\vdots\\\boldsymbol{q}'^n\boldsymbol{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\c_{s+1}\\\vdots\\c_n\end{bmatrix},\ (\boldsymbol{a}=Q\boldsymbol{c})$$

とすれば ${}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{a}={}^t\boldsymbol{b}{}^tPAP\boldsymbol{b}=b_1^2+\cdots+b_p^2$, ${}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{a}={}^t\boldsymbol{c}{}^tQAQ\boldsymbol{c}=-c_{s+1}^2-\cdots-c_n^2$ より

$$b_1^2+\cdots+b_p^2=-c_{s+1}^2-\cdots-c_n^2$$

従って $b_1=\cdots=b_p=0$, $\therefore$ $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ に矛盾する．よって $p=s$ $(\therefore q=t)$ である． □

正値二次形式 二次形式 $f(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ や実対称行列 A は，全ての $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}>0$ が成り立つとき **正値** または **正定値** であるという. （${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\geqq 0$ のとき**半正値**，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}<0$ $(\leqq 0)$ のとき**負値**（**半負値**）という.
A が負値 (半負値) ならば $-A$ は正値 (半正値) である．)

定理 (6.10)[3.5] (固有値による正値性の判定) 実対称行列 A や二次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正値. $\Leftrightarrow$ A の固有値が全て正.
$(\because)$ A の全ての固有値を $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ とする．${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正値ならば, A を対角化する直交行列 $U=[\boldsymbol{u}_1\ \cdots\ \boldsymbol{u}_n]$ をとれば $\boldsymbol{u}_i$ は固有値 α_i に対する固有ベクトルであり， $0<{}^t\boldsymbol{u}_iA\boldsymbol{u}_i={}^t\boldsymbol{u}_i(\alpha_i\boldsymbol{u}_i)=\alpha_i({}^t\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i)=\alpha_i1=\alpha_i$ $(i=1,\ldots,n)$
逆に， $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ が全て正ならば，任意の $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ について，[4.1] より ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\alpha_1y_1^2+\cdots+\alpha_ny_n^2>0$ よって ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ は正値である.