単純多数決（1）

単純多数決

ある議案に対して，

1人1票ずつ「賛成」か「反対」かを投票

（1）「賛成の票数」＞「反対の票数」 → 可決
「反対の票数」＞「賛成の票数」 → 否決

（2）「賛成の票数」が過半数以上 → 可決
そうでなければ → 否決

「棄権」がなければ（1），（2）は同じ

単純多数決（2）

選択対象が2つの場合　→（1）

（例えば，選挙で候補者が2人の場合）

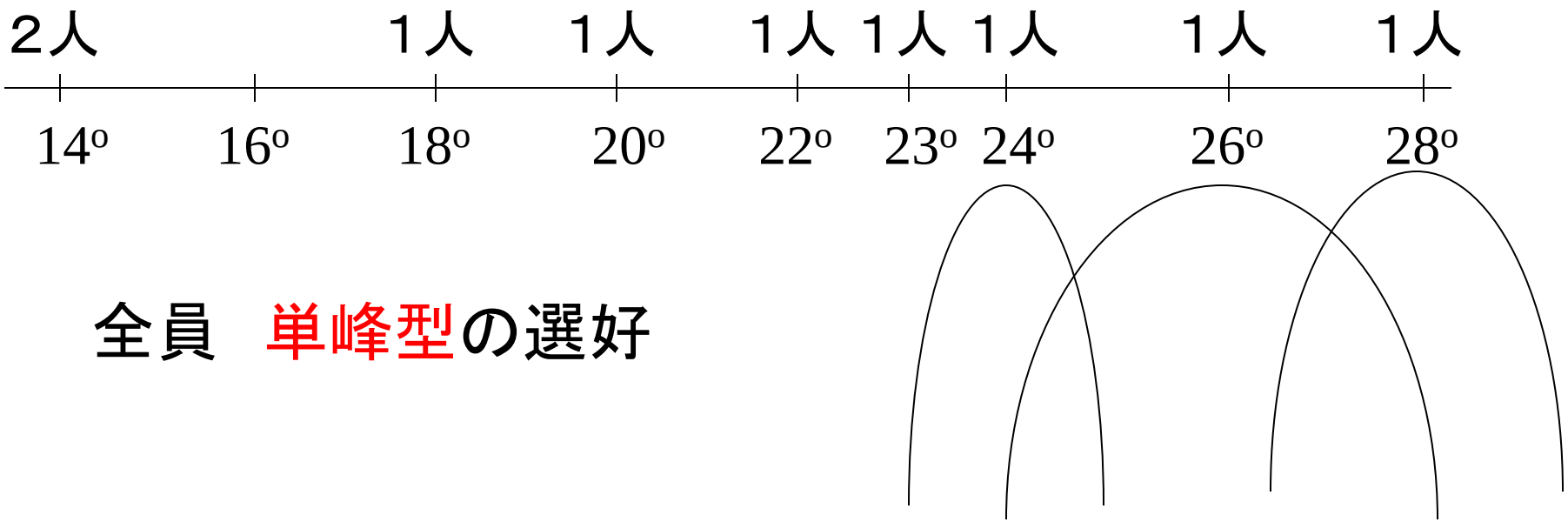
選択対象が3つ以上の場合

（例えば，選挙で候補者が3人以上の場合）

→　最大得票数の対象が選ばれる

単純多数決－2対比較（1）

例:　教室の温度



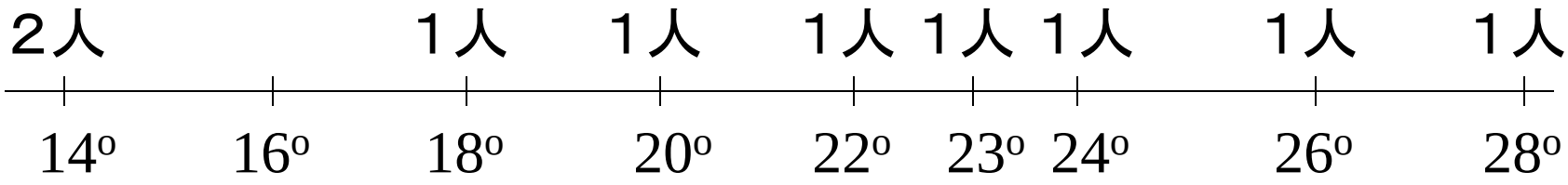
全員　単峰型の選好

20°と22°との単純多数決

20°:　２＋１＋１＝4票　　22°:　１＋１＋１＋１＋１＝5票

→　22°が選ばれる

単純多数決－2対比較 （2）



22° と 23° との単純多数決

22°:　２＋１＋１＋１＝５票　　23°:　１＋１＋１＋１＝４票

→　22° が選ばれる

他も同様　→　22° が必ず選ばれる

全員が単峰型の選好を持つ場合

２対比較の単純多数決ではメディアン（中位数）が必ず選ばれる

単純多数決の公平性 （1）

単純多数決 → 人々の意思を集計して社会として意思決定する一つの方法

1, 2, … , n の n 人の人からなる社会（組織）

例えば，1つの議案を可決するか否決するか？

1	賛成
2	反対
・	・
・	・
n	賛成

→ 可決 または 否決

関数 f

（集団的意思決定関数）

単純多数決の公平性（2）

単純多数決は

$$f(\text{賛成}, \text{反対}, \cdots, \text{賛成}) = \begin{cases} \text{可決} & \text{賛成の数} > \text{反対の数} \\ \text{否決} & \text{そうでない場合} \end{cases}$$

満場一致は

$$f(\text{賛成}, \text{反対}, \cdots, \text{賛成}) = \begin{cases} \text{可決} & \text{賛成の数} = n \\ \text{否決} & \text{そうでない場合} \end{cases}$$

他にもいろいろな f の可能性がある

単純多数決の公平性 （3）

各 $i = 1,2, \ldots ,n$ について，

賛成（Y），反対（N），どうでもよい（I） があり，

社会全体として，

賛成（Y），反対（N），どうでもよい（I） を決める。

$D_i = \{1, 0, -1\}$ $i = 1, 2, \ldots , n,$ $D = \{1, 0, -1\}$

1: 賛成，可決　　0:どうでもよい

−1:反対，否決

集団的決定関数 $f : D_1 \times \ldots \times D_n \rightarrow D$

$f(d_1, \ldots , d_n) \in D = \{1, 0, -1\}$

単純多数決の公平性 （4）

単純多数決

$$f(d_1, \ldots, d_n) = \begin{cases} 1 & d_1 + \ldots + d_n > 0 \\ 0 & d_1 + \ldots + d_n = 0 \\ -1 & d_1 + \ldots + d_n < 0 \end{cases}$$

定理

集団的決定関数 $f : D_1 \times \ldots \times D_n \rightarrow D$ が,

決定性, 匿名性, 中立性, 正の感応性を満たす

$\Leftrightarrow$ f は単純多数決

単純多数決の公平性（5）

決定性: 任意の $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ に対して,
$f(d_1, \ldots, d_n) \in D$ が存在する。

匿名性: 任意の $(d_1, \ldots, d_n), (d'_1, \ldots, d'_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$
において, ある i, j に対して,

$$d_i = 1,\ d'_i = -1,\quad d_j = -1,\ d'_j = 1,\quad d_k = d_k \quad k \neq i, j$$

$$\rightarrow \quad f(d'_1, \ldots, d'_n) = f(d_1, \ldots, d_n)$$

単純多数決の公平性（6）

中立性:　任意の $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ に対して,

$$f(-d_1, \ldots, -d_n) = -f(d_1, \ldots, d_n)$$

正の感応性:

$f(d_1, \ldots, d_n) = 0$ または 1 となる

任意の $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ と,

ある i に対して　$d_i = -1 \rightarrow d'_i = 0$ または 1

$d_i = 0 \rightarrow d'_i = 1$

$j \neq i$ に対して $d_j = d'_j$ となる

任意の $(d'_1, \ldots, d'_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ に対して

$$f(d'_1, \ldots, d'_n) = 1$$

４つの公理について

定理

集団的決定関数　$f: D_1 \times \ldots \times D_n \rightarrow D$　が,

決定性, 匿名性, 中立性, 正の感応性を満たす

$\Leftrightarrow$　f　は単純多数決

４つの公理が満たされない例

決定性:　賛否同数のときの偶然事象による決定

匿名性:　持ち株に応じた票数

中立性:　２／３以上の賛成必要

正の感応性:　陪審員制度　全員一致以外は差し戻し

単純多数決の問題点

1，2，3の3人，A，B，Cの3つの選択肢

1の選好：　A　＞　B　＞　C

2の選好：　B　＞　C　＞　A

3の選好：　C　＞　A　＞　B

単峰性　No！

直接投票　→　A，B，C　1票ずつで決定できない

2対比較

A　と　B　→　A

A　と　C　→　C

B　と　C　→　B

サイクルが起こって決定できない

投票のパラドックス，コンドルセ・パラドックス

さまざまな投票ルール

総当り法（2対比較）

単純多数決　－　最高得票者が当選

ボルダ･ルール　－　n－1, n－2, …, 1, 0 と点数付け

負け抜け選　－　票数の少ない候補者から抜ける

決選投票つき多数決　－　上位2人による決選投票

マルケビッチの例

タイプ	I	II	III	IV	V	VI
人数	18	12	10	9	4	2
選好順序	a	b	c	d	e	e
	d	e	b	c	b	c
	e	d	e	e	d	d
	c	c	d	b	c	b
	b	a	a	a	a	a

社会的厚生関数

集団的意思決定関数

1　賛成
2　反対
・　・
n　賛成

$\xrightarrow{f}$　可決　または　否決

社会的厚生関数

より一般的に，m 個の選択肢

1　選好順序　R_1
2　選好順序　R_2
・　・・・
n　選好順序　R_n

$\xrightarrow{f}$　選好順序　R

$a\,R_i\,b$ → i は 選択肢　a を b より好むか無差別である

Arrow の一般可能性定理

R_i (i=1,…,n), 推移性を満たす　　[a R_i b] かつ [b R_i c] → a R_i c

a P_i b ⇔ [a R_i b] かつ [b R_i a でない]

a I_i b ⇔ [a R_i b] かつ [b R_i a]

Arrow の一般可能性定理

$n \geq 2$, $m \geq 3$ であれば,

社会的推移性, 広範性, パレート原理, 無関係対象からの独立性

非独裁性をすべて満たす社会的厚生関数 f は存在しない。

5つの公理

社会的推移性： 社会的選好順序 R も推移性を満たす

広範性： R_i は推移性を満たすどのような選好順序でもよい

パレート原理： どのような2つの選択肢 a, b についても,

$$a\,R_i\,b \quad \forall i=1,\ldots,n \quad \rightarrow \quad a\,R\,b$$

無関係対象からの独立性： どのような2つの選択肢 a, b についても，その間の社会的選好順序は，この2つに関する各人の選好順序のみで決まる。

非独裁性： ある1人の人の選好順序が，他の人々の選好順序に関わらず，社会的選好順序になることはない。

投票の順序と戦略的行動 （1）

30人のクラス

学期末の評価： 教場試験， 持ち帰り試験， レポート

3つのグループ：

寮生（10人）： 教場 ＞ 持ち帰り ＞ レポート

学究派（10人）： レポート ＞ 教場 ＞ 持ち帰り

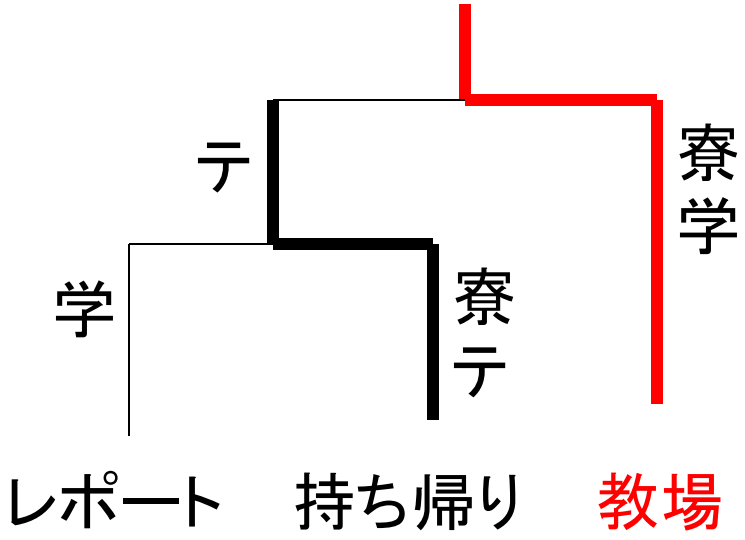
テニス部（10人）： 持ち帰り ＞ レポート ＞ 教場

教師の提案：

「教場」でない場合には「持ち帰り」か「レポート」かを先に決め，そのあとで，「教場」にするかしないかを決める。

投票の順序と戦略的行動 （2）

寮生（10人）:　教場 ＞ 持ち帰り ＞ レポート
学究派（10人）:　レポート ＞ 教場 ＞ 持ち帰り
テニス部（10人）:　持ち帰り ＞ レポート ＞ 教場



選好に正直に投票した場合，
「教場」が選ばれる

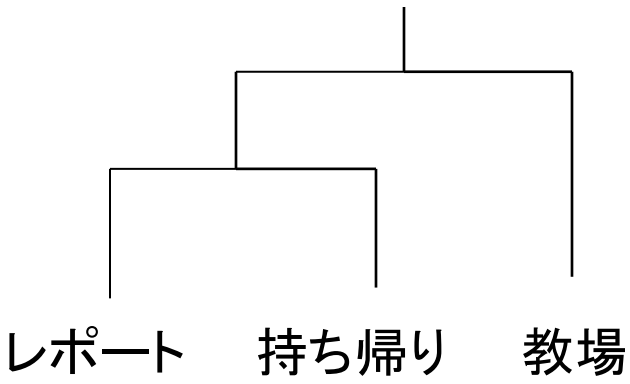
↓

「テニス部」にとっては最悪

↙

もし，最初に「レポート」に投票していれば，「レポート」が勝ち残り，「レポート」対「教場」では，「レポート」が勝つ　？！

投票の順序と戦略的行動 （3）



寮:	教場	＞	持ち帰り	＞	レポート
学究派:	レポート	＞	教場	＞	持ち帰り
テニス部:	持ち帰り	＞	レポート	＞	教場

部分ゲーム完全均衡による分析

２段階目 「レポート」 vs 「教場」

「寮」,「学」,「テ」 すべて選択肢は 「レポート」と「教場」

２段階目 「持ち帰り」 vs 「教場」

「寮」,「学」,「テ」 すべて選択肢は 「持ち帰り」と「教場」

投票の順序と戦略的行動 （4）

寮:	教場	＞	持ち帰り	＞	レポート
学究派:	レポート	＞	教場	＞	持ち帰り
テニス部:	持ち帰り	＞	レポート	＞	教場

２段階目　「レポート」 vs 「教場」

テニス部	寮生＼学究派	レポート	教場
レポート	レポート	レポート	レポート
	教場	レポート	教場

テニス部	寮生＼学究派	レポート	教場
教場	レポート	レポート	教場
	教場	教場	教場

弱支配される戦略を含まないナッシュ均衡　→　（教場，レポ，レポ）

投票の順序と戦略的行動 （5）

寮: 教場 ＞ 持ち帰り ＞ レポート
学究派: レポート ＞ 教場 ＞ 持ち帰り
テニス部: 持ち帰り ＞ レポート ＞ 教場

２段階目 「持ち帰り」 vs 「教場」

テニス部 持ち帰り

寮生 ＼ 学究派	持ち帰り	教場
持ち帰り	持ち帰り	持ち帰り
教場	持ち帰り	教場

テニス部 教場

寮生 ＼ 学究派	持ち帰り	教場
持ち帰り	持ち帰り	教場
教場	教場	教場

弱支配される戦略を含まないナッシュ均衡 →（教場，教場，持ち）

投票の順序と戦略的行動 （6）

寮:	教場	＞	持ち帰り	＞	レポート
学究派:	レポート	＞	教場	＞	持ち帰り
テニス部:	持ち帰り	＞	レポート	＞	教場

1段階目　「持ち帰り」 vs 「レポート」

テニス部

持ち帰り

寮生 ＼ 学究派	持ち帰り	レポート
持ち帰り	持ち→教場	持ち→教場
レポート	持ち→教場	レポート

テニス部

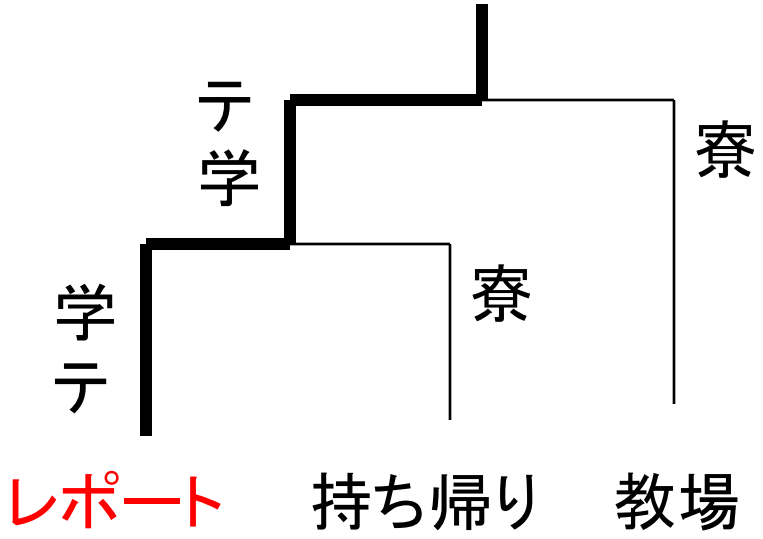
レポート

寮生 ＼ 学究派	持ち帰り	レポート
持ち帰り	持ち→教場	<u>レポート</u>
レポート	レポート	レポート

弱支配される戦略を含まないナッシュ均衡　→　（持ち，レポ，レポ）

投票の順序と戦略的行動 （7）

寮生: 教場 ＞ 持ち帰り ＞ レポート
学究派: レポート ＞ 教場 ＞ 持ち帰り
テニス部: 持ち帰り ＞ レポート ＞ 教場



戦略的に投票した場合，「レポート」が選ばれる

投票の順序の操作 → ？？？

課題

Reading Assignment

第８章 「政党の分裂と連立政権の形成」を

ゲーム理論で解く

Homework（次回にレポートとして提出）

練習問題７