配布資料4：展開形ゲーム

（参考文献12「ゲーム理論」（岡田章著，有斐閣）61 − 93，105 − 114ページ参照）

1. 例を使った説明ー展開形ゲームIを参照

 (a) $N = \{1, 2, 3\}$ プレイヤーの集合， $\Gamma = (K, P, p, U, h)$

 - $K = (V, E)$ グラフ
 $V = \{x_0, x_1, ..., x_6, w_1, ..., w_8\}$ 点の集合
 x_0 始点， $W = \{w_1, ..., w_8\}$ 終点の集合
 $X = V \setminus W = \{x_0, x_1, ..., x_6\}$ 手番の集合
 $E = \{e_1, ..., e_{10}\}$ 枝の集合
 $A(x_0) = \{e_1, e_2\}$ x_0 から出る枝(選択肢）の全体
 （問題）$A(x_2)$ は？

 - $P^0 = \{x_1\}$ 偶然手番の集合
 $P^1 = \{x_0\}, P^2 = \{x_2\}, P^3 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ プレイヤー1，2，3の手番の集合

 - $p_{x_1} = (p_{x_1}(e_3), p_{x_1}(e_4)), p_{x_1}(e_3) + p_{x_1}(e_4) = 1, p_{x_1}(e_3), p_{x_1}(e_4) \geq 0$
 偶然手番において枝がとられる確率
 - $U^0 = \{u_1^0\}$ 偶然手番の情報集合の全体
 $U^1 = \{u_1^1\}, U^2 = \{u_1^2\}, U^3 = \{u_1^3, u_2^3\}$ プレイヤー1，2，3の情報集合の全体
 $u_1^0 = \{x_1\},\ u_1^1 = \{x_0\},\ u_1^2 = \{x_2\},\ u_1^3 = \{x_3, x_4\},\ u_2^3 = \{x_5, x_6\}$
 $A(u_1^0) = \{e_3, e_4\},\ A(u_1^1) = \{e_1, e_2\},\ A(u_1^2) = \{e_5, e_6\}$
 $A(u_1^3) = \{e_7, e_8\},\ A(u_2^3) = \{e_9, e_{10}\}$ 各情報集合における枝の全体
 - $h^i(w_j)$ 終点 w_j におけるプレイヤー i の利得

 (b) 戦略

 - 純粋戦略
 $S^1 = \{e_1, e_2\}, S^2 = \{e_5, e_6\},$
 $S^3 = \{(e_7, e_9), (e_7, e_{10}), (e_8, e_9), (e_8, e_{10})\}$
 - 混合戦略
 $Q^1 = \{q^1 = (q^1(e_1), q^1(e_2)) | q^1(e_1) + q^1(e_2) = 1, q^1(e_1), q^1(e_2) \geq 0\}$
 $Q^2 = \{q^2 = (q^2(e_5), q^2(e_6)) | q^2(e_5) + q^2(e_6) = 1, q^2(e_5), q^2(e_6) \geq 0\}$
 $$\begin{aligned} Q^3 = \{q^3 = (&q^3(e_7, e_9), q^3(e_7, e_{10}), q^3(e_8, e_9), q^3(e_8, e_{10}))| \\ &q^3(e_7, e_9) + q^3(e_7, e_{10}) + q^3(e_8, e_9) + q^3(e_8, e_{10}) = 1, \\ &q^3(e_7, e_9), q^3(e_7, e_{10}), q^3(e_8, e_9), q^3(e_8, e_{10}) \geq 0\} \end{aligned}$$
 - 行動戦略
 $$\begin{aligned} B^1 = \{b^1 = (b^1_{u_1^1}) | b^1_{u_1^1} = (&b^1_{u_1^1}(e_1), b^1_{u_1^1}(e_2)), \\ &b^1_{u_1^1}(e_1) + b^1_{u_1^1}(e_2) = 1, b^1_{u_1^1}(e_1), b^1_{u_1^1}(e_2) \geq 0\} \end{aligned}$$
 $$\begin{aligned} B^2 = \{b^2 = (b^2_{u_1^2}) | b^2_{u_1^2} = (&b^2_{u_1^2}(e_5), b^2_{u_1^2}(e_6)), \\ &b^2_{u_1^2}(e_5) + b^2_{u_1^2}(e_6) = 1, b^2_{u_1^2}(e_5), b^2_{u_1^2}(e_6) \geq 0\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B^3 = \{ b^3 = (b^3_{u^3_1}, b^3_{u^3_2}) | b^3_{u^3_1} = (b^3_{u^3_1}(e_7), b^3_{u^3_1}(e_8)), b^3_{u^3_2} = (b^3_{u^3_2}(e_9), b^3_{u^3_2}(e_{10})), \\
b^3_{u^3_1}(e_7) + b^3_{u^3_1}(e_8) = 1, b^3_{u^3_1}(e_7), b^3_{u^3_1}(e_8) \geq 0, \\
b^3_{u^3_2}(e_9) + b^3_{u^3_2}(e_{10}) = 1, b^3_{u^3_2}(e_9), b^3_{u^3_2}(e_{10}) \geq 0 \}
\end{aligned}
$$

(c) 期待利得

- 行動戦略 $b = (b^1, b^2, b^3)$
  $p(w_3|b)$　b のもとで終点 w_3 に到達する確率
  $= p_{x_1}(e_4) b^1_{u^1_1}(e_1) b^3_{u^3_1}(e_7)$
  （問題）$p(w_6|b)$ は？
  $H^i(b)$　b のもとでの期待利得
  $= \sum_{j=1}^{8} p(w_j|b) \times h^i(w_j)$ $i = 1, 2, 3$
- 純粋戦略 $s = (s^1, \cdots, s^n)$

$$
p(w_3|s) = \begin{cases} p_{x_1}(e_4) & s^1(u^1_1) = e_1, s^3(u^3_1) = e_7 \text{のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}
$$

  （問題）$p(w_6|s)$ は？
  $H^i(s) = \sum_{j=1}^{8} p(w_j|s) \times h^i(w_j)$ $i = 1, 2, 3$
- 混合戦略 $q = (q^1, \cdots, q^n)$
  $p(w_3|q) = q^1(e_1) \times p_{x_1}(e_4) \times (q^3(e_7, e_9) + q^3(e_7, e_{10}))$
  （問題）$p(w_6|q)$ は？
  $H^i(q) = \sum_{j=1}^{8} p(w_j|q) \times h^i(w_j)$ $i = 1, 2, 3$

(d) 戦略形ゲーム表現 $G = (N, \{S^i\}_{i \in N}, \{H^i\}_{i \in N})$

- $N = \{1, 2, 3\}$
- $S^1 = \{e_1, e_2\}, S^2 = \{e_5, e_6\}$,
  $S^3 = \{(e_7, e_9), (e_7, e_{10}), (e_8, e_9), (e_8, e_{10})\}$
- $H^i(b), H^i(s), H^i(q)$ $i = 1, 2, 3$

(e) 部分ゲーム

- K の部分木 K' に関して，$\Gamma = (K, P, p, U, h)$ のすべての情報集合は K' の点と K' 以外の点を同時に含むことはないとする．このとき，Γ の各構成要素を部分木 K' に制限したゲームを Γ の部分ゲームという．
- 部分木　$K(x_2) = (V(x_2), E(x_2))$
  $V(x_2) = \{x_2, x_5, x_6, w_5, w_6, w_7, w_8\}, E(x_2) = \{e_5, e_6, e_9, e_{10}\}$
  $\Gamma(x_2)$ は部分ゲーム
- （問題）
  - $K(x_3) = (V(x_3), E(x_3))$ の $V(x_3)$，$E(x_3)$ は？
  - $\Gamma(x_3)$ は部分ゲームになるか？

(f) 部分ゲーム完全均衡

すべての部分ゲームにナッシュ均衡を与えるような戦略の組を 部分ゲーム完全均衡 という。

(g) 完全情報

i. すべての情報集合が１点集合であるゲームを 完全情報ゲーム という.

ii. 各プレイヤーは選択において過去のプレイの結果をすべて知っている.

iii. 定理：（点の数が有限個の）完全情報ゲームにおいては，純粋戦略によるナッシュ均衡が存在する.

(h) 完全記憶ー以下，展開形ゲーム II を参照

- 展開形ゲーム II において，u_1^1 と u_2^1 を考える.
- x_3 は u_1^1 において e_1 を採ったときに到達可能
- x_4 も u_1^1 において e_1 を採ったときに到達可能
- u_1^1 と u_3^1 についても同様
- 展開形ゲーム II は完全記憶ゲーム
- 行動戦略 $\rightarrow$ 混合戦略
  - 行動戦略 $b^1 = (b^1_{u_1^1}, b^1_{u_2^1}, b^1_{u_3^1})$
    $b^1_{u_1^1} = (b^1_{u_1^1}(e_1), b^1_{u_1^1}(e_2))$,
    $b^1_{u_2^1} = (b^1_{u_2^1}(e_7), b^1_{u_2^1}(e_8))$,
    $b^1_{u_3^1} = (b^1_{u_3^1}(e_9), b^1_{u_3^1}(e_{10}))$
  - 混合戦略
    純粋戦略 $s^1 = (s^1_{u_1^1}, s^1_{u_2^1}, s^1_{u_3^1}) = (e_1, e_7, e_9)$ に対しては,
    $q(e_1, e_7, e_9) = b^1_{u_1^1}(e_1) b^1_{u_2^1}(e_7) b^1_{u_3^1}(e_9)$ でこの純粋戦略を用いる確率を与える
    （問題）$s^1 = (s^1_{u_1^1}, s^1_{u_2^1}, s^1_{u_3^1}) = (e_2, e_7, e_{10})$ を用いる確率は？
  - 終点に到達する確率
    * $p(w_1|b) = b^1_{u_1^1}(e_1) \times p_{x_1}(e_3) \times b^1_{u_2^1}(e_7)$
    * $p(w_1|q) = (q(e_1, e_7, e_9) + q(e_1, e_7, e_{10}) \times p_{x_1}(e_3)$
      $= (b^1_{u_1^1}(e_1) b^1_{u_2^1}(e_7) b^1_{u_3^1}(e_9) + b^1_{u_1^1}(e_1) b^1_{u_2^1}(e_7) b^1_{u_3^1}(e_{10})) \times p_{x_1}(e_3)$
      $= b^1_{u_1^1}(e_1) b^1_{u_2^1}(e_7) p_{x_1}(e_3)$
    * 両者は等しくなる
    * （問題）終点 w_7 について等しくなることを確かめよ.
- 混合戦略 $\rightarrow$ 行動戦略
  - 混合戦略 $q^1 = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8)$
    $q_1 = q(e_1, e_7, e_9), q_2 = q(e_1, e_7, e_{10})$
    $q_3 = q(e_1, e_8, e_9), q_4 = q(e_1, e_8, e_{10})$
    $q_5 = q(e_2, e_7, e_9), q_6 = q(e_2, e_7, e_{10})$
    $q_7 = q(e_2, e_8, e_9), q_8 = q(e_2, e_8, e_{10})$
  - 行動戦略
    $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 > 0,\ q_5 + q_6 + q_7 + q_8 > 0$ のとき

* $b^1_{u^1_1}(e_1) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$, $b^1_{u^1_1}(e_2) = q_5 + q_6 + q_7 + q_8$
  * $b^1_{u^1_2}(e_7) = \frac{q_1+q_2}{q_1+q_2+q_3+q_4}, b^1_{u^1_2}(e_8) = \frac{q_3+q_4}{q_1+q_2+q_3+q_4}$
  * （問題）$b^1_{u^1_3}(e_9)$, $b^1_{u^1_3}(e_{10})$ はどうなるか？

  $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$, $q_5 + q_6 + q_7 + q_8 = 0$ のとき
  * $b^1_{u^1_1}(e_1) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$, $b^1_{u^1_1}(e_2) = 0$
  * $b^1_{u^1_2}(e_7) = \frac{q_1+q_2}{q_1+q_2+q_3+q_4}, b^1_{u^1_2}(e_8) = \frac{q_3+q_4}{q_1+q_2+q_3+q_4}$
  * $b^1_{u^1_3}(e_9) = q_1 + q_3 + q_5 + q_7 = q_1 + q_3$, $b^1_{u^1_3}(e_{10}) = q_2 + q_4 + q_6 + q_8 = q_2 + q_4$
  * （問題）$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$, $q_5 + q_6 + q_7 + q_8 = 1$ のときはどうか？
- 終点に到達する確率
  * $p(w_1|q) = (q_1 + q_2) \times p_{x_1}(e_3)$
  * $p(w_1|b) = b^1_{u^1_1}(e_1) \times p_{x_1}(e_3) \times b^1_{u^1_2}(e_7) = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\frac{q_1+q_2}{q_1+q_2+q_3+q_4} \times p_{x_1}(e_3) = (q_1 + q_2) \times p_{x_1}(e_3)$
  * 両者は等しくなる
  * （問題）終点 w_7 について，等しくなることを確かめよ．

• 定理：（点の数が有限個の）完全記憶ゲームにおいては，行動戦略によるナッシュ均衡が存在する．