確率と統計(O)
「確率変数と確率分布(第5章)」

■担当教員：　杉山　将（計算工学専攻）

■居室：　W8E-505

■電子メール:　　　sugi@cs.titech.ac.jp

■授業のウェブサイト:

http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

講義計画（シラバス）

- 確率と統計の基礎
- 確率変数，確率分布
- 積率，積率母関数
- 離散型の確率分布の例
- 連続型の確率分布の例
- 確率不等式， 擬似乱数
- 多次元の確率分布
- 大数の法則，中心極限定理
- 統計的推定，仮説検定

確率

- 確率(probability):事象の起こりやすさを定量的に示すもの
- 事象Aの起こる確率を次式で表す

$$P(A)$$

- 高校で習う確率は，例えばさいころの出た目を数え上げるなど，計算するものであった．
- 大学以降で習う確率は，数学的に定義するもの．

確率の公理

- コルモゴロフ(Kolmogorov) の公理

1. 任意の事象 A_i に対して

$$0 \leq P(A_i) \leq 1$$

2. 全確率は1：

$$P(\Omega) = 1$$

Ω は全事象

3. 互いに排反な事象 A_i に対して

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

- 以後，全ての確率計算は上記の3つの公理のみに基づいて行なわれる．

確率変数と確率分布

- 確率変数(random variable):とる値に対して確率が与えられている変数
- 実現値:確率変数が実際にとる値
- 確率分布(probability distribution):確率変数の実現値と確率との関係を関数として表現したもの

- 確率変数は大文字で，実現値は小文字で表わすことが多い

離散型の確率変数と確率関数

- 離散型(discrete type)確率変数: 可算集合の中の値をとる確率変数
- 離散型の確率変数の確率分布: 確率変数がそれぞれの値をとる確率

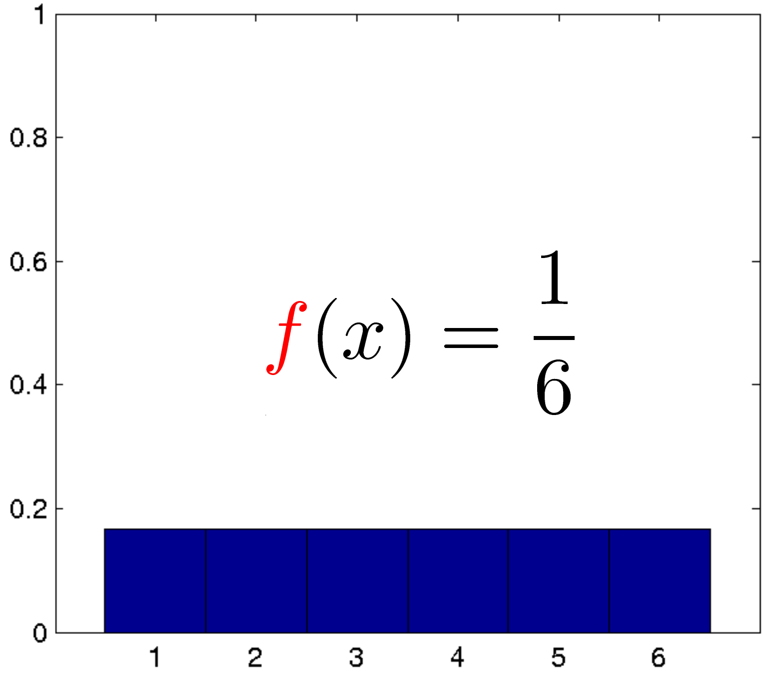
$$P(X = x) = f(x)$$

$f(x)$:確率関数(probability function)

$$f(x) \geq 0, \qquad \sum_x f(x) = 1$$

- 確率関数は, 確率質量関数(probability mass function)とも呼ばれる

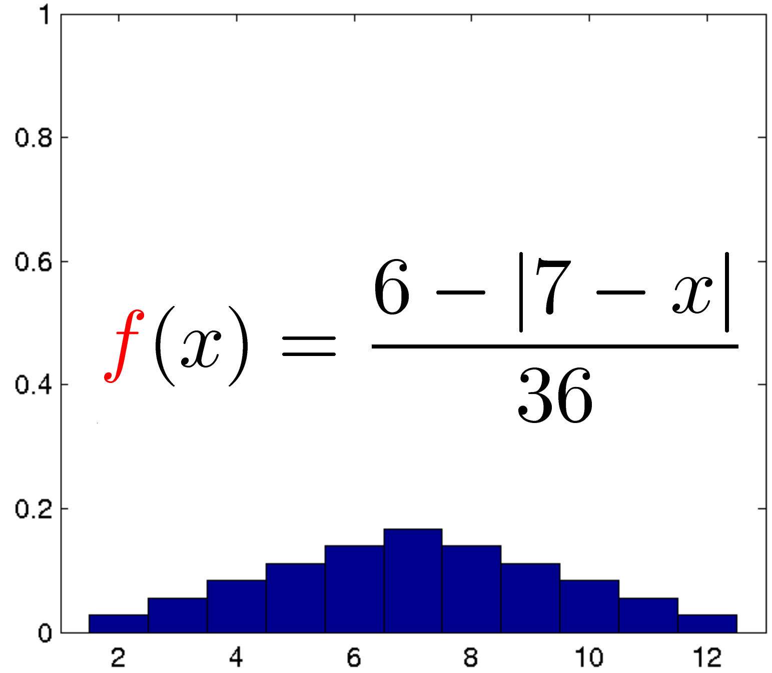
離散型の確率分布の例



$$f(x) = \frac{1}{6}$$

x

さいころの出る目



$$f(x) = \frac{6-|7-x|}{36}$$

x

二つのさいころの出る目の和

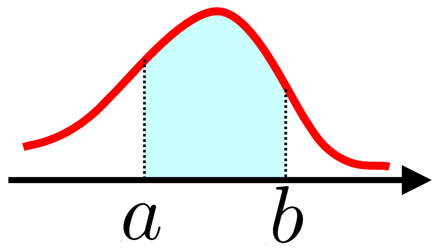
主な離散型の確率分布

- 一様分布
- 二項分布
- 超幾何分布
- ポアソン分布
- 負の二項分布
- 幾何分布

連続型の確率変数と確率密度関数

- 連続型(continuous type)確率変数:連続値をとる確率変数
- 連続型の確率変数の確率分布:確率変数が a 以上 b 以下の値をとる確率

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



$f(x)$:確率密度関数(probability density function)

$$f(x) \geq 0, \quad \int f(x)dx = 1$$

- 注意:連続型の確率変数がある値 a をとる確率はゼロ！

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

累積分布関数

- 連続型の確率変数が x 以下の値をとる確率

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$F(x)$:累積分布関数(cumulative distribution function)

$$F'(x) = f(x)$$

- 広義単調増加:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$$

- 範囲:

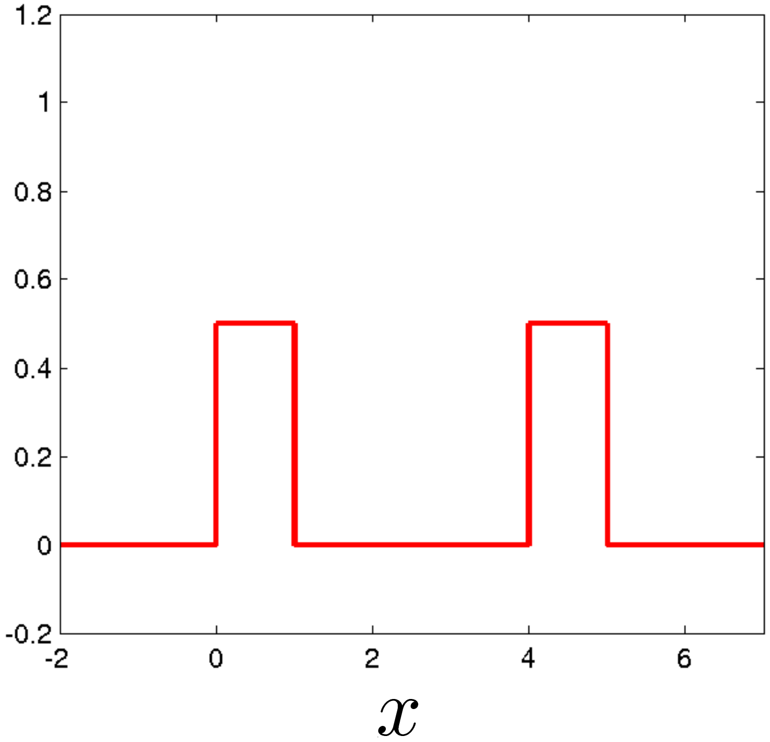
$$x \to -\infty \quad \Longrightarrow \quad F(x) \to 0$$

$$x \to \infty \quad \Longrightarrow \quad F(x) \to 1$$

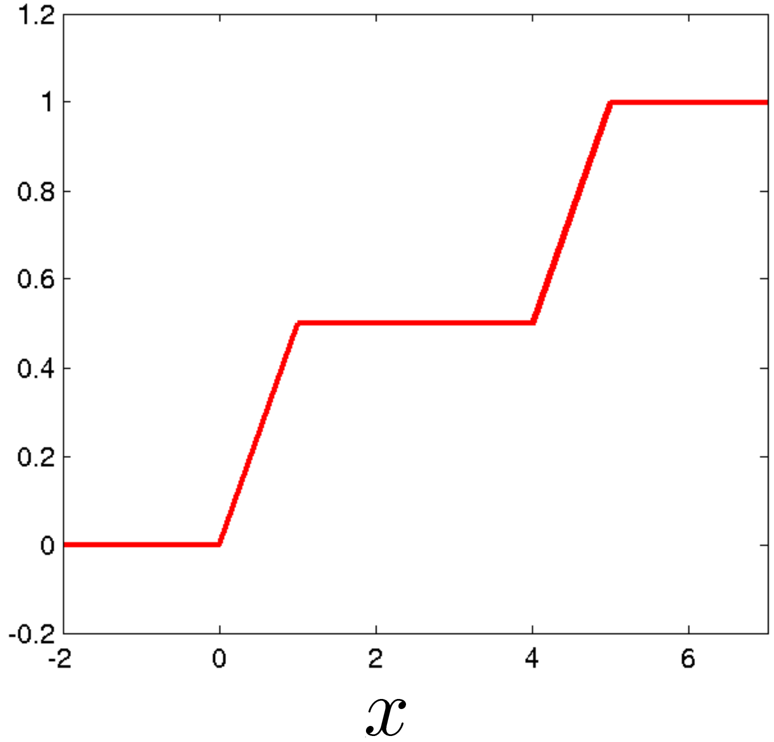
- 右連続:

$$\epsilon \to +0 \quad \Longrightarrow \quad F(x+\epsilon) \to F(x) \text{ for any } x$$

確率密度関数と累積分布関数の例



確率密度関数



累積分布関数

主な連続型の確率分布

- 一様分布
- 正規分布
- 指数分布
- カイ二乗分布
- ガンマ分布
- ベータ分布
- コーシー分布
- t分布

確率変数の性質を表わす指標

- 期待値(expectation):確率変数の値の平均（正確には確率による重み付きの平均）
- 確率変数 X の期待値を $E(X)$ で表す
  - 離散型:

$$E(X) = \sum_{x} x f(x)$$

  - 連続型:

$$E(X) = \int x f(x) dx$$

期待値作用素の表記について

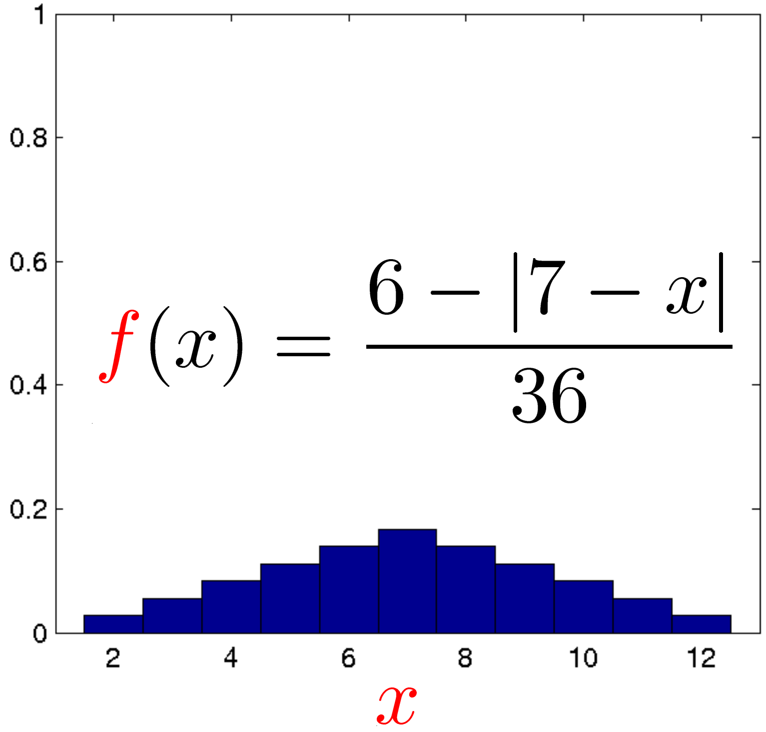
- $E(\cdot)$は確率変数 X に関する期待値を表す．即ち

$$E(\cdot) = \int \cdot f(x)dx$$

- 正確には，$E(\cdot)$ を $E_X(\cdot)$ と表記すべきであるが，簡単のため省略している．
- 以後，説明を簡単にするため，連続型の確率変数を主に扱うことにする．離散型を考える場合は，積分を和に変更すればよい．

例

- 二つのさいころの目の和の期待値を求めよ



$$f(x) = \frac{6 - |7 - x|}{36}$$

二つのさいころの
出る目の和

$$E(X) = \sum_{x=2}^{12} x f(x) = 7$$

期待値演算の性質

- 定数は期待値をとっても値は変わらない:

$$E(c) = c$$

- 定数を足した期待値は，期待値に定数を足したものと等しい:

$$E(X + c) = E(X) + c$$

- 定数倍の期待値は，期待値の定数倍と等しい:

$$E(cX) = cE(X)$$

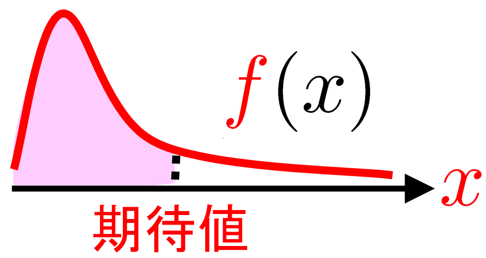
期待値演算は線形

- 演習:上記の性質を証明せよ

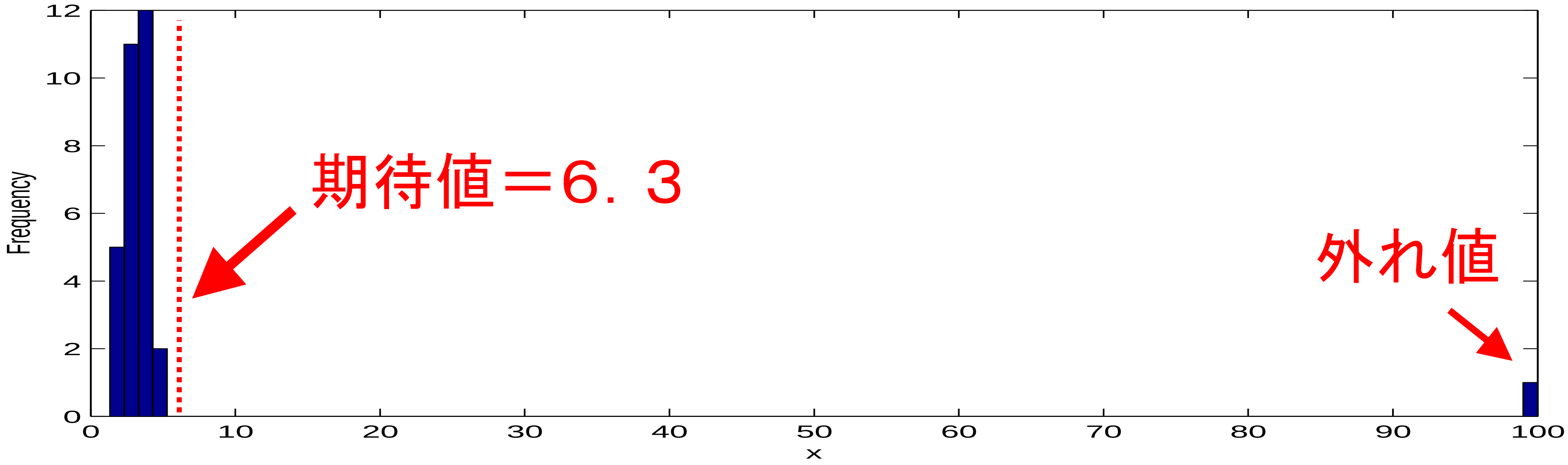
期待値の問題点

- 期待値は，外れ値(outlier)があるときに直感と合わない値になることがある．

$$E(X) = \int x f(x) dx$$



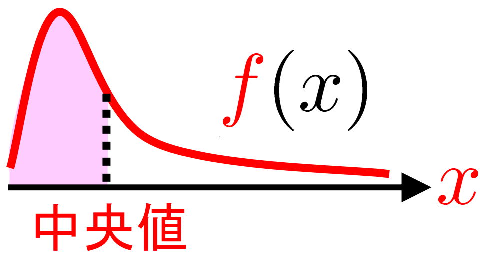
- 例：収入分布．一人大金持ち(外れ値)がいると，その人以外全員が期待値以下になってしまう．



その他のよく用いる指標

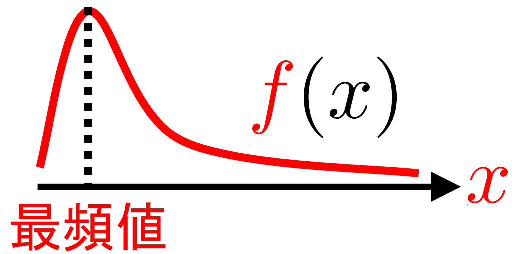
- 中央値(median):

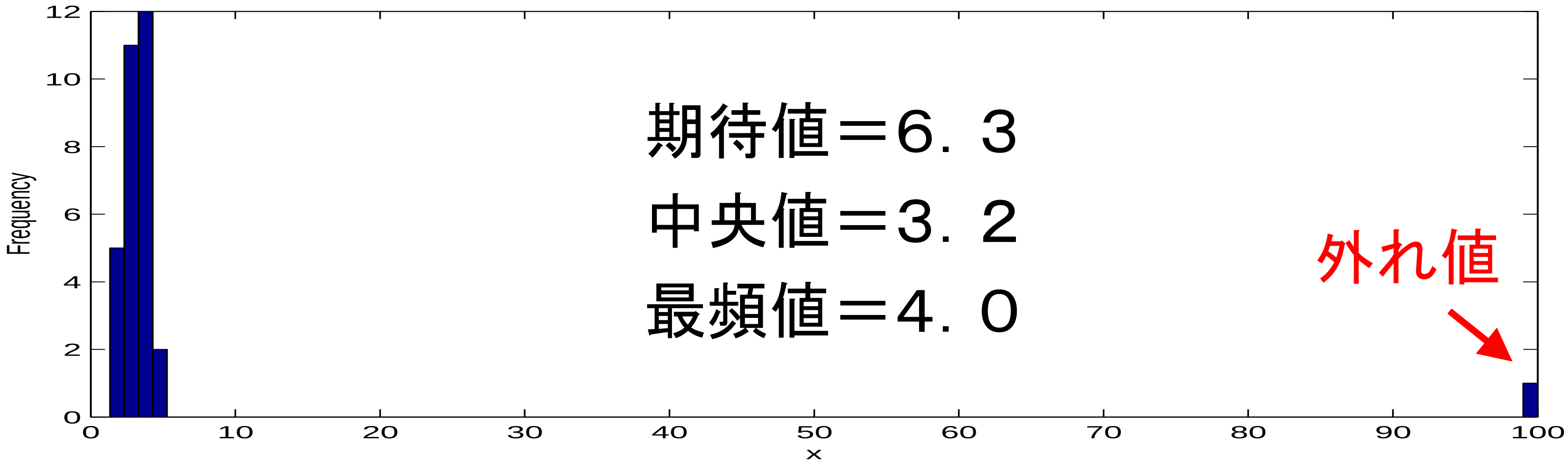
$$P(X \leq x) = \frac{1}{2} \text{となる} x$$



- 最頻値(mode):

$$f(x) \text{を最大にする} x$$





まとめ

- 確率変数と確率分布
- 離散型の確率変数
  - 確率関数
- 連続型の確率変数
  - 確率密度関数
  - 累積分布関数
- 確率変数の性質を表わす指標
  - 期待値
  - 中央値
  - 最頻値

宿題

$-\infty < a < b < \infty$

1. $[a,b]$ 上に定義された確率密度関数 $f(x)$ を考える.
   A) 次の二乗誤差 $J_1(y)$ を最小にする y を y_1 で表す:

$$y_1 = \operatorname*{argmin}_y J_1(y) \qquad J_1(y) = \int_a^b (x-y)^2 f(x)dx$$

このとき, y_1 は X の期待値(つまり, $y_1 = E[X]$)であることを示せ.

   B) 次の絶対誤差 $J_2(y)$ を最小にする y を y_2 で表す:

$$y_2 = \operatorname*{argmin}_y J_2(y) \qquad J_2(y) = \int_a^b |x-y| f(x)dx$$

このとき, y_2 は X の中央値(つまり, $F(y_2) = 1/2$)であることを示せ.

$\operatorname*{argmin}_y J(y)$: $J(y)$を最小にする y