電気学第一：回路の基礎（3. 複素数を用いた交流回路表現）

担当：水本哲弥（南 3 号館 1025 号室、tmizumot@pe.titech.ac.jp）

3. 複素数を用いた交流回路表現

前章までに述べた電気回路の解析では、正弦波の交流電圧を加えた場合、回路素子に応じて電流は正弦波あるいは余弦波を考えなければならず、回路が複雑になるとその解析はさらに複雑になる。この原因は、交流信号の場合にはその振幅と位相という二つの量を同時に考慮しなければならない点にある。この問題を解決するために、各種のパラメータを複素数で表現する方法が考案された。この方法は、単に電気・電子の分野だけでなく、機械工学や微分方程式の解法などに広く用いられている。

3.1 複素指数関数による電圧・電流の表示

電気の分野では、電流 i と混同しないように、虚数単位は j で記述する。

オイラーの公式：$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$　（j は虚数単位）

これを用いて、

$$V = V_m e^{j\omega t} = V_m\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right) \tag{1}$$

と表すことにする。ここで、

$v = V_m\cos\omega t$ を表示する場合：$v = \mathrm{Re}[V] = V_m\,\mathrm{Re}[e^{j\omega t}] = V_m\cos\omega t$

$v = V_m\sin\omega t$ を表示する場合：$v = \mathrm{Im}[V] = V_m\,\mathrm{Im}[e^{j\omega t}] = V_m\sin\omega t$

である。

実際の電気信号は複素数ではないので、その実数部あるいは虚数部に対応していると考える。しかし、途中の計算は複素数のまま行い、複素数で表現された結果の実数部あるいは虚数部をとることにより、実際の電気信号に対する回路の応答を計算することができる。多くの応用では実数部あるいは虚数部をとる過程は省略できる。

3.2 インピーダンスの複素数表示

電圧、電流の複素表示を、それぞれ $V = V_m e^{j\omega t}$ 、$I = I_m e^{j\omega t}$ とする。

a.抵抗

$$V_R = Z_R I = RI \text{ より } Z_R = R \tag{2}$$

b.インダクタンス(コイル)

$$V_L = Z_L I = L\frac{d}{dt}I = j\omega LI \text{ より } Z_L = j\omega L \tag{3}$$

c.キャパシタンス(コンデンサ)

$$V_C = Z_C I = \frac{1}{C}\int Idt = \frac{1}{j\omega C}I \text{ より } Z_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{4}$$

【例題 3-1】

抵抗 R とインダクタンス L の直列接続回路を考える。回路に流れる電流 $I = I_m e^{j\omega t}$ を基準に考えると、抵抗 R の両端に発生する電圧は $V_R = Z_R I$ であり、インダクタンス L の両端に発生する電圧は $V_L = Z_L I = j\omega L I$ であるから、直列接続回路の両端に発生する電圧は $V = V_R + V_L = (R + j\omega L)I$ となる。

ここで、虚数部が実際の電圧に対応していると考えると、

$$
\begin{aligned}
v &= \mathrm{Im}[V] = \mathrm{Im}[(R + j\omega L)I] = \mathrm{Im}[I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, e^{j(\omega t + \theta)}] \\
&= I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \theta)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

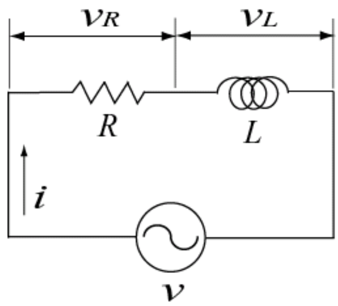


図 3-1 R-L 直列接続

となる。ここで $\theta = \tan^{-1} \dfrac{\omega L}{R}$ である。式(5)の結果は、2.3 節の結果と一致する。

直列接続回路の両端に加わる電源電圧 V を入力、抵抗 R の両端に発生する電圧 V_R を出力と考えると、その比を電圧伝達関数という。

$$
H(\omega) = \frac{V_R}{V} = \frac{R}{R + j\omega L} \tag{6}
$$

この伝達関数の周波数特性は、周波数が十分低ければ $R >> \omega L$ であるから $|H(\omega)| = 1$ となり、入力はほとんど変化せずに出力に現れ、周波数が十分高くなると $R << \omega L$ であるから $|H(\omega)| = 0$ となり、出力は 0 になる。すなわち、周波数の低い電気信号だけが出力に現れる低域通過(ローパス)フィルタとして作用する。$|H(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる周波数 $\omega = \dfrac{R}{L}$ をカットオフ周波数とよび、フィルタ作用の目安となる(図 3-2)。

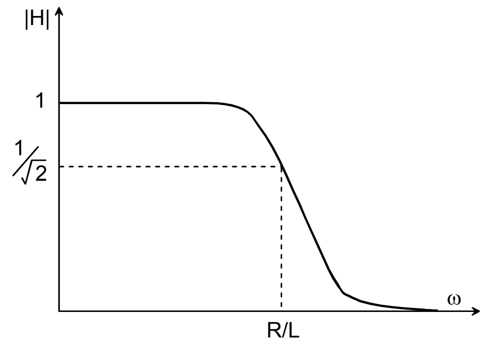


図 3-2 ローパスフィルタの周波数特性

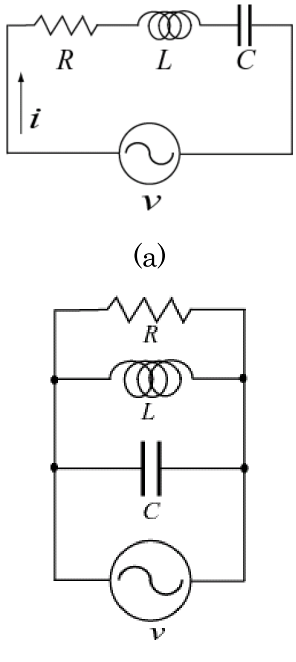
3.3 共振回路

(1)直列共振回路

インダクタンスとキャパシタンスを直列あるいは並列に接続した回路を共振回路という。

図 3-3(a)に示す LCR の直列共振回路を考えると、

$$
\begin{aligned}
V &= V_R + V_L + V_C = (Z_R + Z_L + Z_C)I \\
&= \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I
\end{aligned}
\tag{7}
$$



(a)

(b)

図 3-3 (a)直列共振回路、(b)並列共振回路

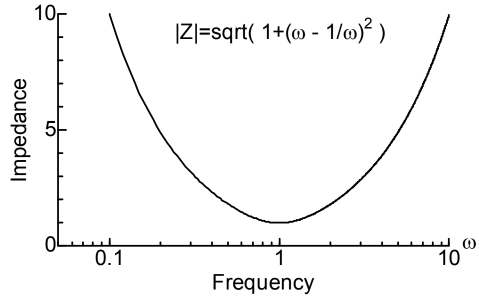
となる。$V = ZI$ とおいて Z を合成インピーダンスとすると、

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (8.a)$$

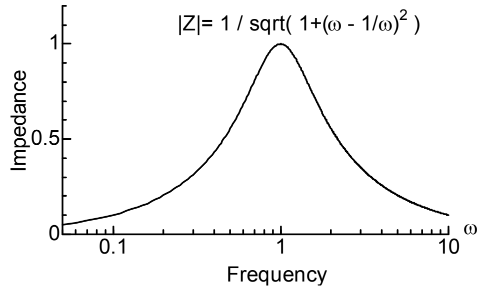
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\angle Z = \tan\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \quad (8.b)$$

となり、$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ または $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ で $|Z| = R$ の最小値をとる。共振とはインピーダンスが極値をとること、あるいはその虚部が 0 になることである。



(a)



(b)

図 3-4 インピーダンスの周波数特性
(a)直列共振回路、(b)並列共振回路

(2)並列共振回路

図 3-3(b)の並列共振回路では

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \quad (9)$$

となるので、インピーダンスの逆数 $Y = \dfrac{1}{Z}$（アドミッタンス）の虚数部が 0 になることより共振の条件を求める方が便利である。共振周波数は、直列共振回路お場合と同じであるが、この場合は共振時にインピーダンスは最大値 $Z = R$ をとる。

共振回路の周波数特性を図 3-4 に示す。直列共振では抵抗 R が小さいほど、並列共振では大きいほど鋭い周波数特性が得られる。これらの特性を利用して、直列および並列共振とも共振周波数 f_0 の信号電流あるいは電圧を選択的に取り出すのに用いられている。

【例題 3-2】

図 3-5 に示す巻線抵抗 R_L をもつインダクタンスとキャパシタンスの並列回路の共振周波数を求めよ。

(解答 3-2)

この回路の合成アドミッタンスは

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{R_L}{R_L{}^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L{}^2 + (\omega L)^2}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

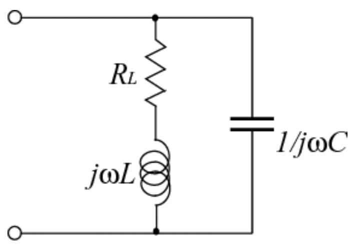


図 3-5 巻き線抵抗をもつインダクタンスとキャパシタンスの並列共振回路

となる。共振条件(虚数部=0)より、共振周波数は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R_L{}^2 C}{L}} \quad (11)$$

と求まる。$R_L << \omega L$ であれば $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ となる。

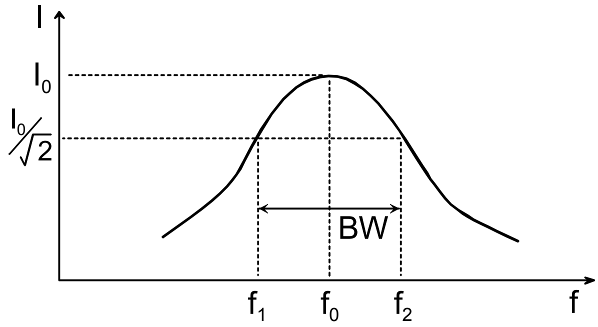


図 3-6 共振曲線と共振幅

(3)共振の鋭さ

実際の共振回路では、周波数特性のピークが急峻であればあるほど選択性が優れている。そこで、直列共振、並列共振とも抵抗は加えずに、インダクタンスとキャパシタンスで共振回路を作る。しかし、インダクタンス、キャパシタンスともに内部抵抗や接続導線による純抵抗分を持っているので、この抵抗分が共振曲線の鋭さを決める。この選択の度合いのよさ(Quality)を示す指標として Q を用いる。

図 3-6 に示す LCR 直列共振回路を流れる電流が示す共振曲線の最大値の $1/\sqrt{2}$ の幅で共振の幅 BWを定義すると、$Q = \omega_0 / BW$ で与えられ、共振周波数で規格化した共振の幅が狭いほど、Qは大きい。具体的には、インダクタンスの場合には $Q = \omega_0 L / R$ 、キャパシタンスの場合には $Q = 1/\omega_0 CR$ となる。

3.4 複素電力と力率の改善

$V = V_m e^{j\omega t}$ 、$I = I_m e^{j(\omega t+\theta)}$ とおくと、電力は $\dfrac{\mathrm{Re}[VI^*]}{2}$ 、力率は $\dfrac{\mathrm{Re}[VI^*]}{|VI|}$ で与えられる。一般的に、電力は配電線とトランスによって送られる。トランスの定格は kVA で与えられるが、トランスに加わる電圧は通常一定であるので、定格によりトランスの最大許容電流が決まる。共振時には電流と電圧は同相、すなわち力率は 1 であることを利用して、負荷にインダクタンスあるいはキャパシタンスを接続して共振に近づけることにより力率を改善して、送電システムを有効に使うことができる。

【例題 3-3】

抵抗とインダクタンスの直列接続回路のインピーダンスは 50Hz において 3+j 4Ω である。この回路の力率を求めよ。さらに、キャパシタンスを直列あるいは並列に接続して力率を 1 にしたい。キャパシタンスの 50Hz におけるインピーダンスを求めよ。

(解答 3-3)

直列接続回路のインピーダンスを極形式で表すと 3+j 4=5(0.6+ j 0.8)である。力率は $\cos\theta = 0.6$ となる。

接続すべきキャパシタンスのインピーダンスを Z_C とおく。キャパシタンスを直列接続した後のインピーダンスは $3 + j4 + Z_C$ となるので、共振するためにはインピーダンスの虚数部=0 の条件により、$Z_C = -j4$ Ω となる。

キャパシタンスを並列接続した場合のアドミッタンスは $\dfrac{1}{3+j4} + \dfrac{1}{Z_C} = \dfrac{3-j4}{25} + \dfrac{1}{Z_C}$ となるので、

$\dfrac{1}{Z_C} = j\dfrac{4}{25}$ すなわち $Z_C = -j\dfrac{25}{4} = -j6.25$ Ω の場合に共振する。