pn 接合の電流－電圧特性の導出

pn 接合の電流電圧特性は、以下の仮定のもとに求める。

(1) 急峻な階段接合を仮定する。拡散電位 $\emptyset_{bi}$ 及び印加された電圧V は、すべて空乏層に印加される。
- 空乏層以外に電界は存在しないと仮定する。p 形、n 形中性領域ではバンドは曲がっていないことと等価である。バンドが曲がっていないことは、中性領域の抵抗は、空乏層に比較して無視できる程度小さいと仮定していることとも等価でもある。

(2) 空乏層内には電子、正孔が存在しないと仮定する。（空乏近似）

(3) 空乏層を介して、Boltzmann の関係が成立する。

(4) 空乏層において、生成再結合はないとする。
- 空乏層で正孔電流、電子電流は一定と仮定していることになる。

(5) 小数キャリア密度は、多数キャリア密度に比較して十分小さい。（低注入条件）
- 中性領域は、電気的に中性であると仮定していることになる。仮定(1)と対似なる仮定である。

電流電圧特性導出の手順は以下のとおりである。

(1) p 型中の少数キャリア（電子）連続の方程式を解いて、電子電流 $J_n(x)$を求める。

(2) n 型中の少数キャリア（正孔）連続の方程式を解いて、正孔電流 $J_p(x)$ を求める。

(3) 全電流 $J_T = J_n(x=-x_p) + J_p(x=+x_n)$を求める。

p 型中の過剰少数キャリア（電子）連続の方程式は、

$$\frac{\partial n_p(x)}{\partial t} = g - \frac{n_p(x)-n_o}{\tau_e} + \mu_e \frac{d}{dx}\left(n_p(x)E(x)\right) + D_e \cdot \frac{d^2 n_p(x)}{dx^2} \qquad (1)$$

である。定常状態であるので $\frac{\partial n(x)}{\partial t} = 0$、光照射などによるキャリアの生成はないので $g = 0$、中性領域には電界は存在しない（仮定(1)）ので $E = 0$であることから、式(1)は次の単純な二階の微分方程式となる。

$$D_e \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left(n_p(x)-n_{po}\right) - \frac{n_p(x)-n_{po}}{\tau_e} = 0 \quad for\ x \le x_p \qquad (2)$$

ここで、$\Delta n_p = n_p(x) - n_{po}$ は位置 x における過剰少数キャリア密度である。

同様に、n 型中性領域における少数キャリア（正孔）連続の方程式は式(3)の二階の微分方程式となる。

$$D_h \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left(p_n(x)-p_{no}\right) - \frac{p_n(x)-p_{no}}{\tau_h} = 0 \quad for\ x \ge x_n \qquad (3)$$

式（2）及び(3)の一般解は、式(4)及び(5)となる。

$$n_p(x)-n_{po}=A_1\cdot\exp\left(+\frac{x}{L_e}\right)+A_2\cdot\exp\left(-\frac{x}{L_e}\right),\ where\ L_e=\sqrt{D_e\tau_e} \qquad (4)$$

$$p_n(x)-p_{no}=A_3\cdot\exp\left(+\frac{x}{L_h}\right)+A_4\cdot\exp\left(-\frac{x}{L_h}\right),\ where\ L_h=\sqrt{D_h\tau_h} \qquad (5)$$

ここで、A_1～A_4は任意の定数である。また、L_e及びL_hは、それぞれ電子及び正孔の拡散長（diffusion length）である。単位は「長さ」である。境界条件は、p 型領域、n 型領域でそれぞれ式(6),(7)で与えられる。

$$\begin{aligned} &n_p(x)-n_{po}=0\quad at\ x=-\infty,\\ &n_p(x)-n_{po}=n_{po}\left\{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right)-1\right\}\quad at\ x=-x_p \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} &p_n(x)-p_{no}=p_{no}\left\{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right)-1\right\}\quad at\ x=+x_n\\ &p_n(x)-p_{no}=0\quad at\ x=-\infty \end{aligned} \qquad (7)$$

これら境界条件のもとで、A_1～A_4の係数を定めると電子及び正孔濃度は式(8)(9)で与えられる。

$$n_p(x)-n_{po}=n_{po}\left\{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right)-1\right\}\exp\left(+\frac{x+x_p}{L_e}\right) \qquad (8)$$

$$p_n(x)-p_{no}=p_{no}\left\{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right)-1\right\}\exp\left(-\frac{x-x_n}{L_h}\right) \qquad (9)$$

式(8)(9)の少数キャリア密度から電流を求める。このとき、中性領域には電界がかかってないことから拡散電流成分のみを計算する。p 型領域及び n 型領域における電子電流及び正孔電流はそれぞれ次式(10)(11)で与えられる。

$$J_e=e\mu_e nE+eD_e\cdot\frac{dn}{dx}=eD_e\cdot\frac{dn}{dx}=+\frac{qD_e n_{po}}{L_e}=n_{po}\left\{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right)-1\right\}\exp\left(+\frac{x+x_p}{L_e}\right)$$

$\cdots(10)$

$$J_h=e\mu_h pE-eD_h\cdot\frac{dp}{dx}=eD_h\cdot\frac{dp}{dx}=+\frac{qD_h p_{no}}{L_h}=p_{no}\left\{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right)-1\right\}\exp\left(-\frac{x-x_n}{L_e}\right)$$

$\cdots(11)$

全電流はこれらの和で求められる。実際の計算としては、空乏層で電流は変化しない（仮定(4)）ので、$x=-x_p$ の電子電流と$x=+x_n$ の正孔電流の和をとる。

$$J_{total} = J_{\mathrm{e}}\left(x=-x_p\right) + J_{\mathrm{h}}\left(x=+x_n\right)$$
$$= q\left(\frac{D_e n_{po}}{L_e} + \frac{D_h p_{no}}{L_h}\right)\left\{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right)-1\right\} = J_{\mathrm{o}}\left\{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right)-1\right\}$$

・・・(11)

ここで、J_0 は逆方向飽和電流（saturation current）で、式(12)である。

$$J_{\mathrm{o}} = q\left(\frac{D_e n_{po}}{L_e} + \frac{D_h p_{no}}{L_h}\right) \qquad (12)$$

電流比 γ を式(13)で定義する。

$$\gamma = \frac{\text{電子電流}}{\text{正孔電流}} = \frac{D_e}{D_h}\frac{L_h}{L_e}\frac{n_{po}}{p_{no}} = \left(\frac{D_e}{D_h}\frac{L_h}{L_e}\right)\frac{N_d}{N_a} \qquad (13)$$

一般に、pn 接合は片方の不純物密度が高い、n^+p 接合あるいは p^+n 接合である。n^+p 接合の場合、$N_d >> N_a$ であるので、$\gamma \gg 1$である。流れる電流の大半は電子電流となる。

空乏層領域での電位変化、空乏層厚さと Built-in potential

空乏近似のもとで空乏層厚さと built-in 電圧の関係を求める。

p 形半導体と n 形半導体を接触させて接合を形成したときに、それぞれのフェルミ準位の差が built-in 電圧Φ_{bi} となる。

$$\Phi_{bi} = \frac{kT}{q}\log\left(\frac{n_{no}p_{po}}{n_i^2}\right) \approx \frac{kT}{q}\log\left(\frac{N_a N_d}{n_i^2}\right) \quad \cdots(1)$$

室温では一般に $n_{no} \approx N_a$, $p_{po} \approx N_d$ であるので、built-in 電圧は不純物ドーピング量で決まる。

空乏層中の電位変化は Poisson の方程式を解けば良い。一般に

$$\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2} = -\frac{Q(x)}{\varepsilon} \quad \cdots(2)$$

電荷密度は、一般に位置の関数として、

$$Q(x) = q\,\{N_d^+(x) - N_a^-(x) + p(x) - n(x)\} \quad \cdots(3)$$

である。ここで、誘電率 $\varepsilon = \varepsilon_{Si}\varepsilon_o$、$\varepsilon_{Si}$は Si の比誘電率（=11.9）、$\varepsilon_o$は真空の誘電率（=8.617083 ×$10^{-12}$F/m）である。

空乏近似とは、空乏層中には可動キャリアである電子、正孔が存在せず、イオン化アクセプタとイオン化ドナーしか存在しないという仮定である。実際には、中性領域と空乏層が急峻に変化しないんであくまでも近似であるが、近似度は高い。空乏近似においては、空乏層中の電荷密度 $Q(x)$ は、式(4)で表される。

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & for\ x \le -x_p \\ -qN_a & for\ -x_p \le x \le 0 \\ +qN_d & for\ 0 \le x \le x_n \\ 0 & for\ +x_n \le x \end{cases} \quad \cdots(4)$$

Poisson の方程式は式(5)となり、

$$\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2} = +\frac{qN_a}{\varepsilon} \qquad for\ -x_p \le x \le 0$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2} = -\frac{qN_d}{\varepsilon} \qquad for\ 0 \le x \le x_n \quad \cdots(5)$$

式(6)のように簡単に解くことができる。

$$\varphi_p(x) = +\frac{N_a}{2\varepsilon}x^2 + A_1\frac{N_a}{\varepsilon}x + A_2 \qquad for\ -x_p \le x \le 0$$

$$\varphi_n(x) = -\frac{N_d}{2\varepsilon}x^2 + B_1\frac{N_d}{\varepsilon}x + B_2 \qquad for\ 0 \le x \le x_n \quad \cdots(6)$$

式(7)の境界条件の元で定数を決めることができる。

$$
\begin{aligned}
x = -x_p &: \quad \frac{d\varphi_p(x)}{dx} = 0 \\
x = 0 &: \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_p(x)}{dx} = \dfrac{d\varphi_n(x)}{dx} \\ \varphi_p(x) = \varphi_n(x) \end{cases} \\
x = +x_n &: \quad \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = 0
\end{aligned}
\qquad \cdots(7)
$$

物理的には、空乏層端 $x = -x_p$ 及び $x = -x_n$ において電界強度が零であること、および $x = 0$ で電界強度ならびにポテンシャルが連続であると云う条件である。ポテンシャルは基準点を任意に選ぶことができる。$x = 0$でポテンシャルが零であるとすると対称性の良い解となる。

ここで、注意すべきは$\varphi_p(x), \varphi_n(x)$ が二次関数である点である。すなわち、バンド図を描くときに空乏層の価電子帯、伝導帯、E_i などは直線ではなく二次関数であることを意識して描く必要がある。ポテンシャルと電界は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&for\ x \le -x_p: && \begin{cases} E = -\dfrac{d\varphi_p(x)}{dx} = 0 \\ \varphi_p(x) = -\dfrac{q\,N_a}{2\varepsilon}\,{x_p}^2 \end{cases} \\
&for\ -x_p \le x \le 0: && \begin{cases} E = -\dfrac{d\varphi_p(x)}{dx} = -\dfrac{q\,N_a}{\varepsilon}(x + x_p) \\ \varphi_p(x) = +\dfrac{q\,N_a}{2\varepsilon}(x + x_p)^2 - \dfrac{q\,N_a}{2\varepsilon}\,{x_p}^2 \end{cases} \\
&for\ 0 \le x \le x_n: && \begin{cases} E == -\dfrac{d\varphi_n(x)}{dx} = +\dfrac{q\,N_n}{\varepsilon}(x - x_n) \\ \varphi_p(x) = -\dfrac{q\,N_d}{2\varepsilon}(x - x_n)^2 - \dfrac{q\,N_d}{2\varepsilon}\,{x_n}^2 \end{cases} \\
&for\ x_n \le x: && \begin{cases} E = -\dfrac{d\varphi_p(x)}{dx} = 0 \\ \varphi_p(x) = -\dfrac{q\,N_a}{2\varepsilon}\,{x_p}^2 \end{cases}
\end{aligned}
\qquad \cdots(8)
$$

電界が $x = 0$ で連続であることから、

$$N_d x_n = N_a x_p = Q_D/q \qquad \cdots(9)$$

である。これは、p 形領域の空乏層でのイオン化アクセプタ総量と n 形領域の空乏層でのイオン化ドナー総量が等しいことを意味する。pn 接合全体で、電荷中性が成立していると考えれば当然の関係である。$+Q_D$は空乏層の n 形側、$-Q_D$は空乏層の p 形側に蓄えられた帯面積当たりの電荷である。

電界強度は $x = 0$ で最大E_{max}となる。

$$|E_{max}| = \frac{q\,N_a x_p}{\varepsilon} = \frac{q\,N_a x_n}{\varepsilon} = \frac{Q_D}{\varepsilon} \qquad \cdots(10)$$

Built-in 電圧は、

$$\emptyset_{bi} = \varphi(x = +x_n) - \varphi(x = -x_p)x = \frac{q\,N_a}{2\varepsilon}\,{x_p}^2 + \frac{q\,N_d}{2\varepsilon}\,{x_n}^2 \qquad \cdots(11)$$

となり、これを変形すると式(11)が得られる。

$$\emptyset_{bi} = \frac{q\,N_a N_d}{2\varepsilon(N_a + N_d)}\left(x_n + x_p\right)^2 \qquad \cdots(12)$$

空乏層幅 W は、built-in 電圧$\emptyset_{bi}$と不純物ドーピング量を用いて、式(12)の様に表現できる。

$$\mathrm{W} = x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon(N_a + N_d)}{q\,N_a N_d}\,\emptyset_{bi}} \qquad \cdots(13)$$

となる。式(1)に示したように、$\emptyset_{bi}$ は不純物ドーピング量によりきまるので、ドーピング量がわかると空乏層幅も決まることがわかる。式(9)、(13)を用いると、

$$x_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon N_a}{q\,N_d(N_a + N_d)}\,\emptyset_{bi}}$$

$$x_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon N_d}{q\,N_a(N_a + N_d)}\,\emptyset_{bi}} \qquad \cdots(14)$$

$N_d x_n = N_a x_p$ であるので、n^+p 接合では $x_p > x_n$。空乏層はドーピング量の少ない p 形側に拡がる。

pn 接合に電圧 V を印加すると、仮定(1)により印加された電圧は空乏層のみに印加されるので拡散電位 $\emptyset_{bi}$は $\emptyset_{bi} - V$となるので、空乏層幅 W も変化する。

$$\mathrm{W} = x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon(N_a + N_d)}{q\,N_a N_d}\,(\emptyset_{bi} - V)}$$

pn 接合の容量

pn 接合には容量が存在する。pn 接合に存在する容量は、pn 接合のみならず、バイポーラトランジスタや MOSFET の交流動作において重要な役割を果たす。容量の存在が回路動作を律速するため、容量に関する理解は重要である。

pn 接合には、

(1) 接合容量 junction capacitance

(2) 拡散容量 diffusion capacitance

の２つが存在する。直流的には、容量 C は Q=CV の関係から求められる。一般に特性が非線形であること、さらには回路動作において重要なことは小信号に対していかなる回路定数をもつかが重要である。従って、印加電圧が微小に変化したときの微小電荷変化から、微小振動容量 small signal capacitance として、容量を定義する。

$$\mathrm{C} \equiv \frac{dQ}{dV}$$

接合容量　junction capacitance

pn 接合に印加する電圧が変化すると、空乏層中のイオン化不純物による電荷（Q_D）が変化する。これによる容量成分が空乏層容量 C_J である。式(9)(14)から

$$Q_J \equiv qN_d x_n = \sqrt{\frac{2q\varepsilon N_a N_d}{(N_a + N_d)}\,(\emptyset_{bi} - V)}$$

$$C_J \equiv \left|\frac{dQ_J}{dV}\right| = \sqrt{\frac{q\varepsilon N_a N_d}{2(N_a + N_d)}}\,\frac{1}{\sqrt{\emptyset_{bi} - V}}$$

と求めることができる。式(13)から、C_J は空乏層厚さ W を用いて、

$$C_J = \frac{\varepsilon}{\mathrm{W}}$$

と表現できる。

$$\frac{1}{C_J^2} = \frac{2(N_a + N_d)}{q\varepsilon N_a N_d}\,(\emptyset_{bi} - V)$$

$1/C^2$ – V特性は直線となる。$1/C^2 = 0$ の切片から Built-in 電圧 $\emptyset_{bi}$が求められる。直線の傾きは $2(N_a + N_d)/q\varepsilon N_a N_d$ であるので、n^+p 接合であれば $N_d \gg N_a$であるので、傾きは $2/q\varepsilon N_a$ となるので p 形半導体の不純物ドーピング量 N_a を求めることができる。

拡散容量　diffusion capacitance

pn 接合が順方向にバイパスされている時、p 形中性領域部分には小数キャリア（電子）が注入されている。順方向バイアス電圧が微小に変化すると注入されている電子の分布は変化する。すなわち、電荷量が変化する。この小数キャリアの変化に起因する容量が拡散容量である。注入電荷量が多いほど容量が大きくなる、すなわち順方向バイアス電圧が大きいほど大きくなる。

順方向バイアスされているときの小数キャリア分布の時間変化から拡散容量を求めることがで

きる。　ここでは単純な求め方と小数キャリアの時間変化から求める方法の２つを示す。

Pn 接合に順方向電圧 V が印加されたとき、空乏層を介して p 形半導体から n 形半導体に電子が注入され、注入された正孔は n 形半導体中を拡散し正孔電流となる。n 形半導体中の過剰少数キャリア Q_{Bh} を求めて、$\Delta Q_{Bh}/\Delta V$ から n 形中性領域に注入された正孔に起因する拡散容量 C_{Dn} が求められる。同様に、空乏層を介して p 形半導体から n 形半導体に電子が注入され、注入された電子は p 形半導体中を拡散し電子電流となる。p 形半導体中の過剰少数キャリア Q_{Bn} を求めて、$\Delta Q_{Be}/\Delta V$ から p 形中性領域に注入された電子に起因する拡散容量 C_{Dp} が求められる。拡散容量 C_D は$C_D = C_{Dn} + C_{Dp}$で表される。

空乏層を介して p 形半導体から n 形半導体に注入されることで生じる n 形中性領域における電子（過剰少数キャリア）は

$$p_n(x) - p_{no} = p_{no}\left\{exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1\right\} exp\left(-\frac{x - x_n}{L_h}\right)$$

これを、$x = +x_n$ から$x = \infty$ まで積分することで Q_{Bh} を求める。

$$Q_{Bh} = q\int_{+x_n}^{\infty} p_{no}\left\{exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1\right\} exp\left(-\frac{x - x_n}{L_p}\right) dx$$

簡単に積分できて、

$$Q_{Bh} = q\, L_h\, p_{no}\left\{exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1\right\}$$

となる。

$$J_p(x = +x_n) = q\frac{D_h}{L_h} p_{no}\left\{exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1\right\}$$

より、

$$Q_{Bh} = \frac{{L_h}^2}{D_p} J_h(x = +x_n)$$

$$C_{Dn} = \frac{\partial Q_{Bh}}{\partial V} = \frac{q}{kT} q\frac{D_h}{L_h} p_{no} L_h \cdot exp\left(\frac{qV}{kT}\right) = \frac{q\tau_h}{kT} J_h(x = +x_n)$$

同様に、

$$C_{Dp} = \frac{\partial Q_{Be}}{\partial V} = \frac{q}{kT} q\frac{D_e}{L_e} n_{po} L_e \cdot exp\left(\frac{qV}{kT}\right) = \frac{q\tau_e}{kT} J_e(x = -x_p)$$

となる。拡散容量 C_D は

$$C_D = C_{Dn} + C_{Dp}$$

となる。

次に、少数キャリアの微小電圧変化に対する応答から求める方法を示す。
順方向バイアス電圧及び電流が DC 成分と交流小信号成分の和で表現されるとする。

$$V(t) = V^{DC} + \Delta V(t) = V^{DC} + \tilde{V}\, e^{j\omega t}$$

$$J(t) = J^{DC} + \Delta J(t) = J^{DC} + \tilde{J}\, e^{j\omega t}$$

ここで、V^{DC}, J^{DC} は直流成分、$\tilde{V}e^{j\omega t}, \tilde{J}e^{j\omega t}$は小信号成分である。

$$\widetilde{J_T} = Y\widetilde{V} = (g + j\omega C_D)\widetilde{V}$$

から、小信号に対するコンダクタンス g と容量 C を求めることができる。n 形中性領域及び p 形中性領域の過剰小数キャリアの交流成分から求めた C が拡散容量 C_D である。

n 形半導体中の小数キャリア $p_n(x,t)$ について、

$$p_n(x,t) = p_n^{DC}(x) + \widetilde{p_n}(x)\, e^{j\omega t}$$

で表現できるとする。$x = +x_n$ での電子密度は pn 接合の電流電圧特性を求めたときと同様

$$p_n(x=0,t) = p_{no} exp\left(\frac{qV(t)}{kT}\right)$$

とすると、

$$\begin{aligned} p_n(x=0,t) &= p_{no} exp\left\{\frac{q\left(V^{DC} + \tilde{V}e^{j\omega t}\right)}{kT}\right\} = p_{no} exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right) exp\left(\frac{q\tilde{V}e^{j\omega t}}{kT}\right) \\ &\approx p_{no} exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)\cdot\left(1 + \frac{q\tilde{V}e^{j\omega t}}{kT}\right) \\ &= p_{no} exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right) + p_{no} exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)\frac{q\widetilde{V}}{kT}\cdot e^{j\omega t} \\ &= \quad p_n^{DC}(x=0) \quad + \quad \widetilde{p_n}(x=0) \quad e^{j\omega t} \end{aligned}$$

n 形中性領域における小数キャリア連続の式は、

$$\frac{\partial\, p_n(x,t)}{\partial t} = -\frac{p_n(x,t) - p_{no}}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p_n(x,t)}{\partial x^2}$$

となる。$p_n^{DC}(x)$ は、

$$\frac{\partial\, p_n^{DC}(x)}{\partial t} = -\frac{p_n^{DC}(x) - p_{no}}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p_n^{DC}(x)}{\partial x^2} = 0$$

となり、$x = +x_n$ で $p_n^{DC}(x) = p_{no} exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)$、$x = \infty$ で $p_n^{DC}(x) - p_{no} = 0$ の境界条件で解けば直流の場合と同じ解

$$p_n^{DC}(x) = p_{no}\left\{exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right) - 1\right\} exp\left(-\frac{x - x_n}{L_p}\right)$$

が得られる。

$\widetilde{p_n}(x)$ は、

$$j\omega\, \widetilde{p_n}(x) = -\frac{\widetilde{p_n}(x)}{\tau_h} + D_h \frac{\partial^2 \widetilde{p_n}(x)}{\partial x^2}$$

となる。

$$D_p \frac{\partial^2 \widetilde{p_n}(x)}{\partial x^2} - \frac{1 + j\omega\tau_h}{\tau_h}\, \widetilde{p_n}(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{p_n}(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{L_h^{*\,2}}\, \widetilde{p_n}(x) = 0$$

ここで、

$$L_h^* = \sqrt{D_h\, \tau_h^*} = \frac{L_p}{\sqrt{1 + j\omega\tau_h}}, \qquad where\ L_p = \sqrt{D_h\, \tau_h}\ and\ \tau_h^* = \frac{\tau_h}{1 + j\omega\tau_h}$$

り、$x=+x_n$ で $\widetilde{p_n}(x)=p_{no}exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)\frac{q\widetilde{V}}{kT}$、$x=\infty$ で $\widetilde{p_n}(x)=0$ の境界条件で解けば、

$$\widetilde{p_n}(x)=\frac{q\widetilde{V}}{kT}\cdot p_{no}\left\{exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)-1\right\}exp\left(-\frac{x-x_n}{L_p}\right)$$

が得られる。$\widetilde{J_h}(x)=-qD_p\frac{\partial\widetilde{p_n}(x)}{\partial x}$ より、

$$\widetilde{J_h}(x)=+\frac{q\widetilde{V}}{kT}\left[\frac{qD_p}{L_h^*}p_{no}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)exp\left(-\frac{x-x_n}{L_h}\right)$$

$\widetilde{J_e}$ を求めて、全電流が $\widetilde{J_T}=\widetilde{J_e}(x=-x_p)+\widetilde{J_h}(x=x_n)$ であることから、

$$\begin{aligned}\widetilde{J_T}&=\frac{q\widetilde{V}}{kT}\left[\frac{qD_h}{L_h^*}p_{no}+\frac{qD_e}{L_e^*}n_{po}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)\\&=\frac{q\widetilde{V}}{kT}\left[\frac{qD_p}{L_h}p_{no}\sqrt{1+j\omega\tau_h}+\frac{qD_n}{L_n}n_{po}\sqrt{1+j\omega\tau_h}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)\end{aligned}$$

$\sqrt{1+j\omega\tau_p}\approx 1+j\frac{\omega\tau_p}{2}$ を考慮すると（これは小信号が低周波であることに相当する）、

$$\widetilde{J_T}=\frac{q\widetilde{V}}{kT}\left[\frac{qD_h}{L_h}p_{no}+\frac{qD_e}{L_e}n_{po}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)+j\omega\frac{q\widetilde{V}}{kT}\left[\frac{qD_h\tau_h}{2L_h}p_{no}+\frac{qD_e\tau_e}{2L_e}n_{po}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)$$

となる。

$\widetilde{J_T}=Y\widetilde{V}=(g+j\omega C_D)\widetilde{V}$ とすると、

$$g=\frac{q}{kT}\left[\frac{qD_h}{L_h}p_{no}+\frac{qD_e}{L_e}n_{po}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)$$
$$C_D=\frac{q}{kT}\left[\frac{qL_h}{2}p_{no}+\frac{qL_e}{2}n_{po}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)$$

となる。

$$J_T{}^{DC}=\left[\frac{qD_h}{L_h}p_{no}+\frac{qD_e}{L_e}n_{po}\right]\left\{exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)-1\right\}$$

であるから、

$$g\approx\frac{q}{kT}J_T{}^{DC}$$
$$r=\frac{1}{g}\approx\frac{kT}{q}\frac{1}{J_T{}^{DC}}$$

また、$\frac{qL_p}{2}p_{no}$ は n 形中性領域に注入された正孔に起因し、$\frac{qL_n}{2}n_{po}$ は p 形中性領域に注入された電子に起因することから、

$$C_D=C_{Dn}+C_{Dp}$$
$$where\ C_{Dn}=\frac{q}{kT}\left[\frac{qL_h}{2}p_{no}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)\text{ and }C_{Dp}=\frac{q}{kT}\left[\frac{qL_e}{2}n_{po}\right]exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)$$

と区別して表示することもある。等価回路的には並列接続だけであるので表記だけの問題である。

$$J_h(x=+x_n)=\frac{qD_h}{L_h}p_{no}\left\{exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)-1\right\},J_e(x=-x_p)=\frac{qD_e}{L_e}n_{po}\left\{exp\left(\frac{qV^{DC}}{kT}\right)-1\right\}$$

であるので、

$$C_{Dn} \approx \frac{q\tau_p}{kT} J_h(x = +x_n) \text{ and } C_{Dp} \approx \frac{q}{kT} J_e(x = -x_p)$$

pn 接合の直流の電流電圧特性は、

$$J_T = q\left[\frac{D_h}{L_h} p_{no} + \frac{D_e}{L_e} n_{po}\right]\left\{exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1\right\}$$

と求められたが、電圧 V における傾き ${}^{\Delta J_T}/_{\Delta \mathrm{V}}$ は g に等しい。

注：拡散容量は２つの方法で求めたが、大きさが２倍異なっている。この理由については各自、考えて欲しい。