平成23年度前期東京工業大学学部講義

電子デバイス

Electron Devices

資料（２）

Kazuya Masu
Director, ICE Cube Center
Solutions Research Laboratory
Precision and Intelligence Laboratory
Dept. Electronics and Applied Physics

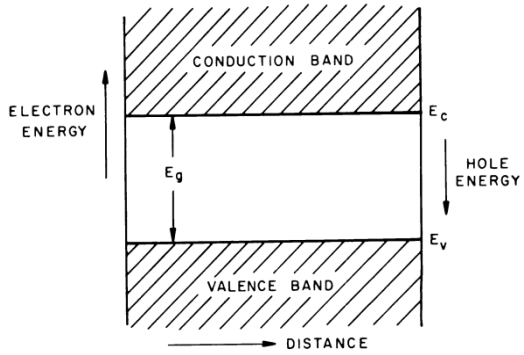
益　一　哉
異種機能集積研究センター
ソリューション研究機構
精密工学研究所
大学院・物理電子システム創造専攻

Tel & Fax: 045-924-5022 Email: masu@ieee.org,
http://masu-www.pi.titech.ac.jp/~masu/index-j.html

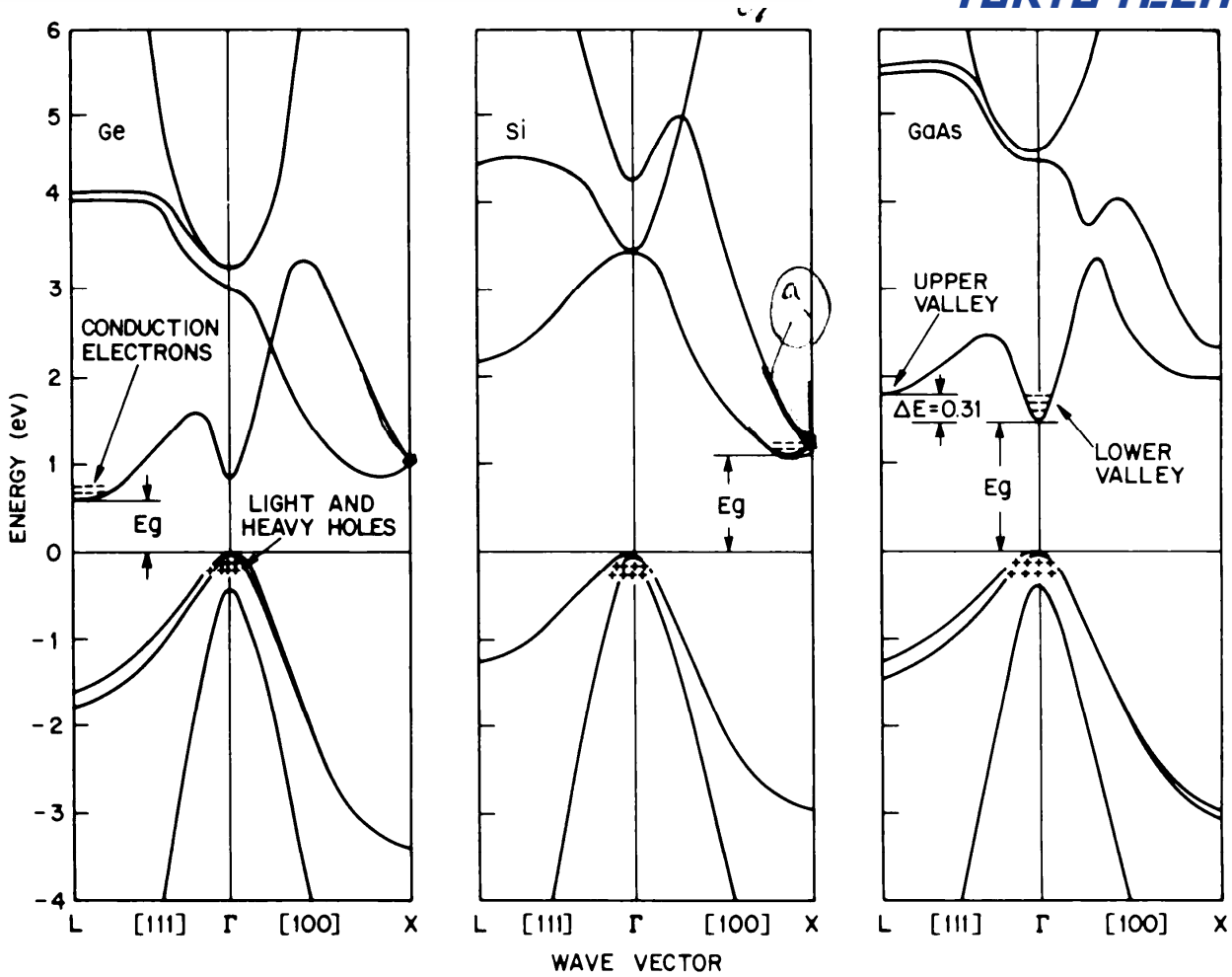
Green ICE Tokyo Tech
Information Communication Energy
Semiconductor Solution Research

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

Band structure

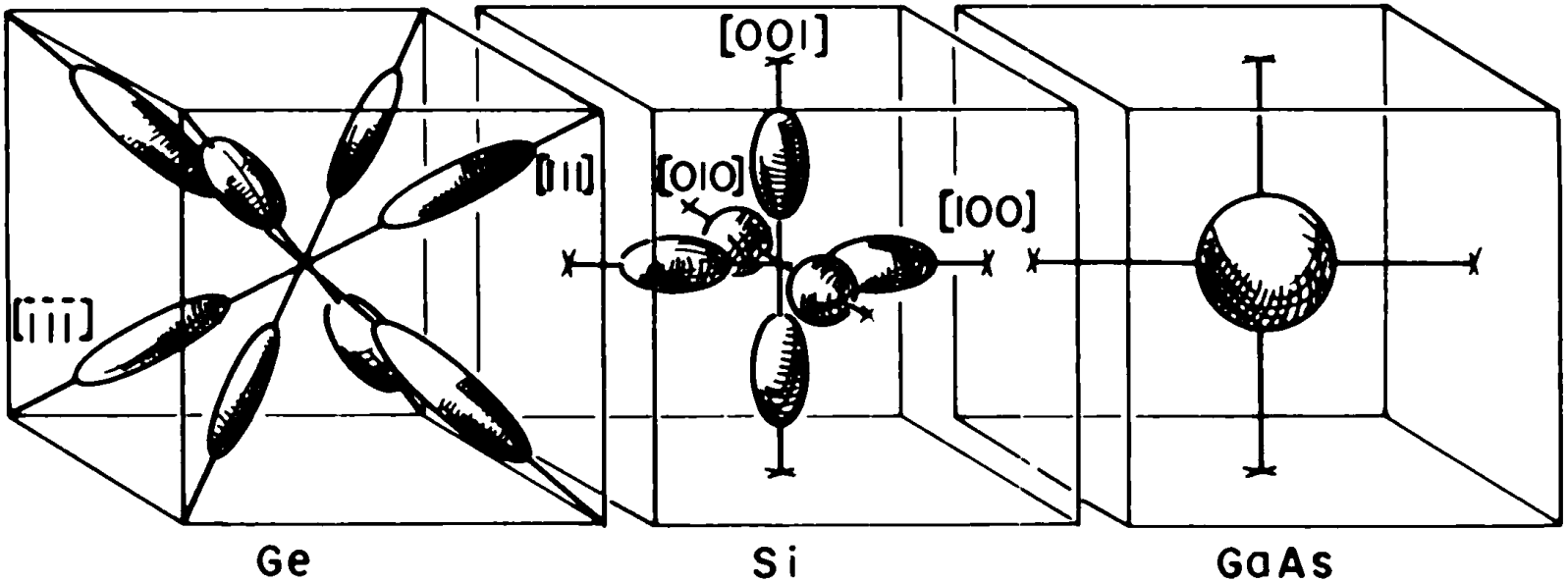


- 単純かしたバンド図
- 横軸は距離！



- エネルギーバンドは、三次元的に複雑な構造をしている。電子デバイスを学ぶ時は、これを単純なバンド図として論じる。
- バンド図を単純化したことで、デバイス動作の理解が容易になた。

Band structure



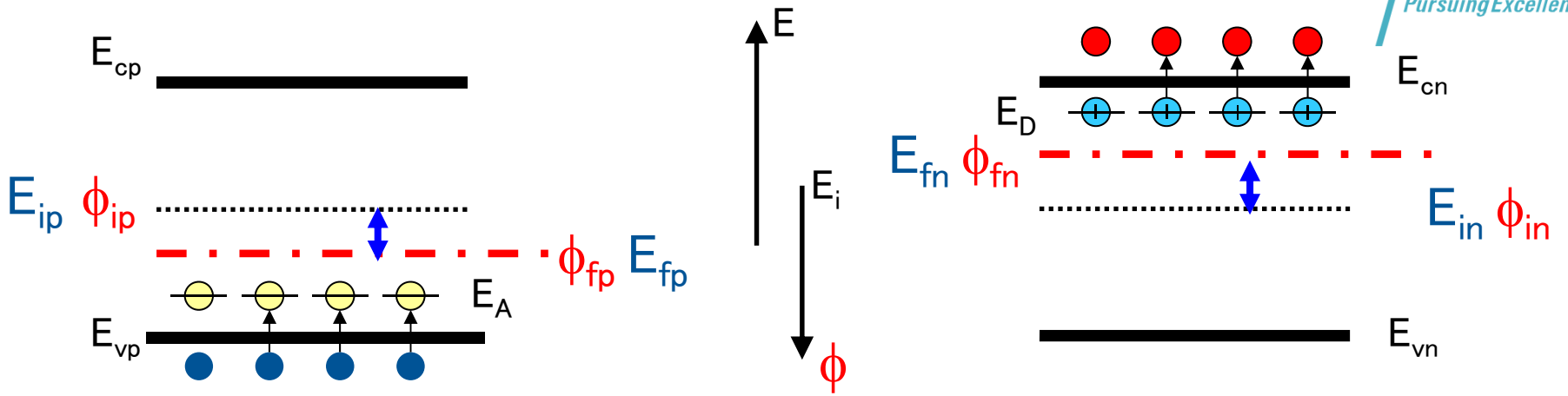
- 伝導体の構造
- 最小エネルギー付近の等エネルギー面:
  - 楕円構造をしている。
  - 楕円帯の曲率が有効質量
- 最小エネルギー点の数は、材料によって異なる。

状態密度有効質量

Density-of-state effective mass

$$\frac{1}{m_{ij}^{*}} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{2} \frac{\partial^{2} \mathrm{E}(\mathbf{k})}{\partial k_i \, \partial k_j}$$

p形、n形半導体のキャリア密度



$$n_p = N_c \cdot \exp\left(-\frac{E_{cp}-E_{fp}}{kT}\right)$$

$$p_p = N_v \cdot \exp\left(-\frac{E_{fp}-E_{vp}}{kT}\right)$$

$$n_p = n_i \exp\left(-\frac{\phi_{fp}-\phi_{ip}}{kT/q}\right) < n_i$$

$$p_p = n_i \exp\left(+\frac{\phi_{fp}-\phi_{ip}}{kT/q}\right) > n_i$$

$$n_n = N_c \cdot \exp\left(-\frac{E_{cn}-E_{fn}}{kT}\right)$$

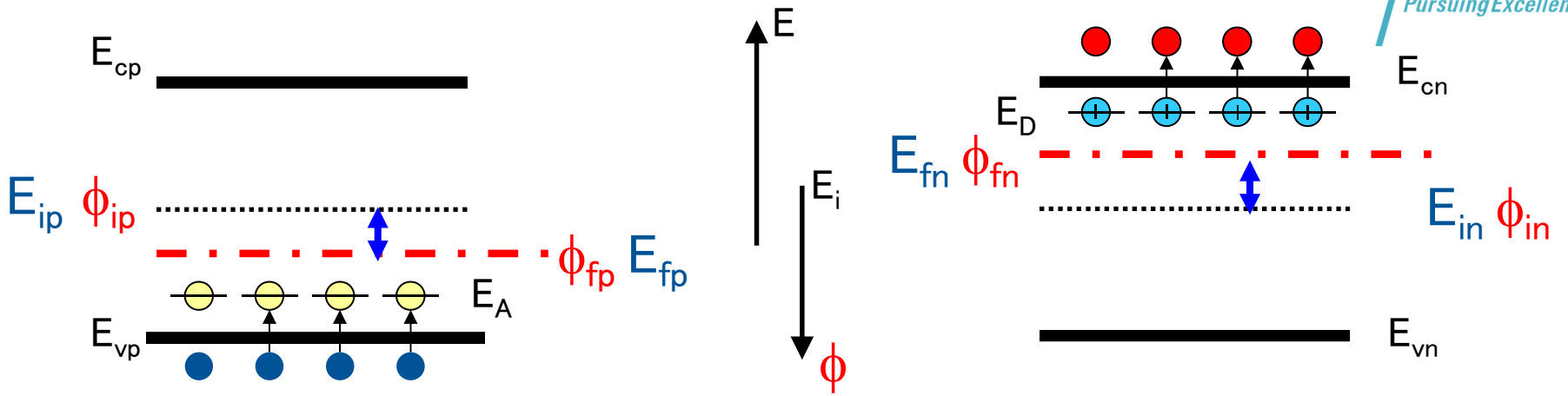
$$p_n = N_v \cdot \exp\left(-\frac{E_{fn}-E_{vn}}{kT}\right)$$

$$n_n = n_i \exp\left(-\frac{\phi_{fn}-\phi_{in}}{kT/q}\right) > n_i$$

$$p_n = n_i \exp\left(+\frac{\phi_{fn}-\phi_{in}}{kT/q}\right) < n_i$$

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} \cdot \exp\left(-\frac{E_c-E_v}{2kT}\right) = \sqrt{N_c N_v} \cdot \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right) \approx 1.5\times10^{10}\,cm^{-3} \quad at\ RT$$

p形、n形半導体のFermi準位



$$n_p = N_c \cdot \exp\left(-\frac{E_{cp} - E_{fp}}{kT}\right)$$

$$p_p = N_v \cdot \exp\left(-\frac{E_{fp} - E_{vp}}{kT}\right)$$

$$n_n = N_c \cdot \exp\left(-\frac{E_{cn} - E_{fn}}{kT}\right)$$

$$p_n = N_v \cdot \exp\left(-\frac{E_{fn} - E_{vn}}{kT}\right)$$

フェルミ準位

$$E_{fp} = E_i - \frac{kT}{q}\log_e \frac{p_p}{n_i}$$

$$\approx E_i + \frac{kT}{q}\log_e \frac{N_a}{n_i}$$

フェルミ準位

$$E_{fn} = E_i + \frac{kT}{q}\log_e \frac{n_n}{n_i}$$

$$\approx E_i + \frac{kT}{q}\log_e \frac{N_d}{n_i}$$

Derivation of carrier density

TOKYO TECH Pursuing Excellence

正孔密度 $= \int$(正孔の状態密度)×(正孔の分布関数)

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} g_h(E)\cdot f_h(E)dE$$

ここで、 $g_h(E) = (4\pi/h^3)(2m_h)^{3/2}(-E-E_v)^{1/2}$

$$f_h(E) = 1 - f_e(E) = \frac{1}{1+\exp\{-(E-E_f)/kT\}}$$

$$p = N_v \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{F}_{1/2}\left(+\frac{E_v - E_f}{kT}\right) \approx N_v \cdot \exp\left(-\frac{E_f - E_v}{kT}\right)$$

$$N_v = 2\left(\frac{2\pi m_{dh} kT}{h^2}\right)^{3/2},\ m_{dh} = \left(m_{lh}^{*\,3/2} + m_{hh}^{*\,3/2}\right)^{2/3}$$

$m_{\ell h}^*$:軽い正孔、 m_{hh}^* :重い正孔
$m_{\ell h}^*/m_o$= 0.16 and m_{hh}^*/m_o = 0.49 for Si

電子密度 $= \int$(状態密度)×(分布関数)

$$n = \int_{E_c}^{\infty} g_e(E)\cdot f_e(E)dE$$

ここで、 $g_e(E) = (4\pi/h^3)(2m_e)^{3/2}(E-E_c)^{1/2}$

$$f_e(E) = \frac{1}{1+\exp\{(E-E_f)/kT\}}$$

$$n = N_c \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{F}_{1/2}\left(-\frac{E_c - E_f}{kT}\right) \approx N_c \cdot \exp\left(-\frac{E_c - E_f}{kT}\right)$$

$$N_c = 2\left(\frac{2\pi m_{de} kT}{h^2}\right)^{3/2} M_c,$$

$$m_{de} = \left(m_1^* m_2^* m_3^*\right)^{1/3} = \left(m_l^* m_t^{*2}\right)^{1/3}$$

M_c: 伝導体の最低エネルギー点の数
M_c=6 for Si, M_c=8 for Ge and M_c=1 for GaAs
m_1^*, m_2^* and m_3^*: 楕円エネルギー面の曲率
m_ℓ^*/m_o= 0.98 and m_t^*/m_o= 0.19 for Si

Fermi integral $\mathrm{F}_n(\eta_f) = \int_0^{\infty} \frac{\eta^n d\eta}{1+\exp(\eta - \eta_f)}$

m_{de} and m_{dh} :状態密度有効質量
density-of-states effective mass

Current equation

一次元の場合

電子電流 $J_n = \boxed{e\mu_n nE} + \boxed{eD_n \cdot \frac{dn}{dx}}$

正孔電流 $J_p = \boxed{e\mu_p pE} - \boxed{eD_p \cdot \frac{dp}{dx}}$

ドリフト電流　　拡散電流

三次元の場合

scalar

$$\vec{J}_n = e\mu_n n\vec{E} + eD_n \cdot \nabla n$$

vector　　vector　　vector

scalar, generally tensor

μ：移動度、D：拡散係数、n and p:キャリア濃度、E:電界強度

Einstein's relation

TOKYO TECH Pursuing Excellence

- キャリア濃度がBoltzmann分布で表現されるとき移動度と拡散係数の間には下記の関係がある。

$$D = \frac{kT}{q}\mu$$

- キャリア濃度がFermi分布で表現されるとき移動度と拡散係数の間には下記の関係がある。

$$D = \left[\frac{kT}{q}\mu\right] \times \frac{F_{1/2}(\varepsilon_f)}{F_{-1/2}(\varepsilon_f)},$$

$$where\ \ F_j(\varepsilon_f) = \frac{1}{j!}\int_0^\infty \frac{x^j\ dx}{1+\exp(x-\varepsilon_f)}$$

導出

1. 電流の式で、電流＝０とする。

$$J_n = e\mu_n nE + eD_n \cdot \frac{dn}{dx} = 0$$

2. キャリア濃度の式で、ポテンシャルφが x の関数であると考える。

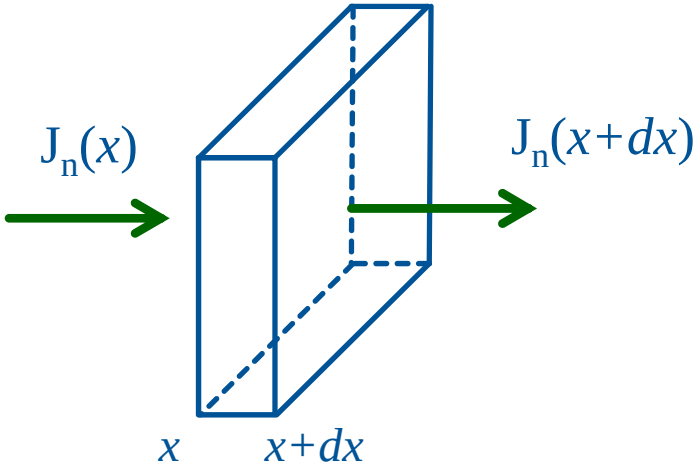
3. 電流の式で、電流＝０とする。

$$n = n_i \exp\left(-\frac{\phi_f - \phi_i(x)}{kT/q}\right)$$

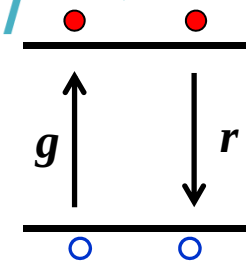
4. このとき、電界強度Eとポテンシャルφの間に次の関係があるとする。

$$E = -\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

Continuity equation キャリア連続の式



- 生成・再結合分



$$\frac{\partial n}{\partial t} = g - r$$

$$= g - \frac{n - n_o}{\tau_e} = g - \frac{\Delta n}{\tau_e}$$

n：電子密度、n_o：平衡時の電子密度

Δn：過剰（小数）電子密度

- キャリアの連続： $\dfrac{\partial n}{\partial t}$

1. 位置xで微小領域dxに流れ込む電子数（電流）
2. 位置x+dxで流出する電子数（電流）
3. 微小領域dx内で発生（生成）する電子数
4. 微小領域dx内で再結合（消滅）する電子数

- 1～4がバランスすること。

- 電流による成分

$$\frac{\partial n}{\partial t} = +\frac{1}{q}\frac{J_n(x+dx) - J_n(x)}{dx} = \frac{1}{q}\frac{dJ_n(x)}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\mu_n n(x)E(x) + D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx}\right\}$$

$$= \mu_n \frac{d}{dx}(n(x)E(x)) + D_n \cdot \frac{d^2 n(x)}{dx^2}$$

一般に、電子密度、電界は位置（x）の関数

$$\frac{\partial n}{\partial t} = g - r$$

$$= g - \frac{n - n_o}{\tau_e} = g - \frac{\Delta n}{\tau_e}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = +\frac{1}{q}\frac{J_n(x+dx) - J_n(x)}{dx} = \frac{1}{q}\frac{d\,J_n(x)}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\mu_n\, n(x)E(x) + D_n \cdot \frac{d\,n(x)}{dx}\right\}$$

$$= \mu_n \frac{d}{dx}\left(n(x)E(x)\right) + D_n \cdot \frac{d^2 n(x)}{dx^2}$$

Continuity equation キャリア連続の式

TOKYO TECH Pursuing Excellence

● 電子

$$\frac{\partial n(x)}{\partial t} = g - \frac{n(x) - n_o}{\tau_e} + \mu_n \frac{d}{dx}\left(n(x)E(x)\right) + D_n \cdot \frac{d^2 n(x)}{dx^2}$$

● 正孔

$$\frac{\partial p(x)}{\partial t} = g - \frac{p(x) - p_o}{\tau_h} + \mu_h \frac{d}{dx}\left(p(x)E(x)\right) + D_n \cdot \frac{d^2 p(x)}{dx^2}$$

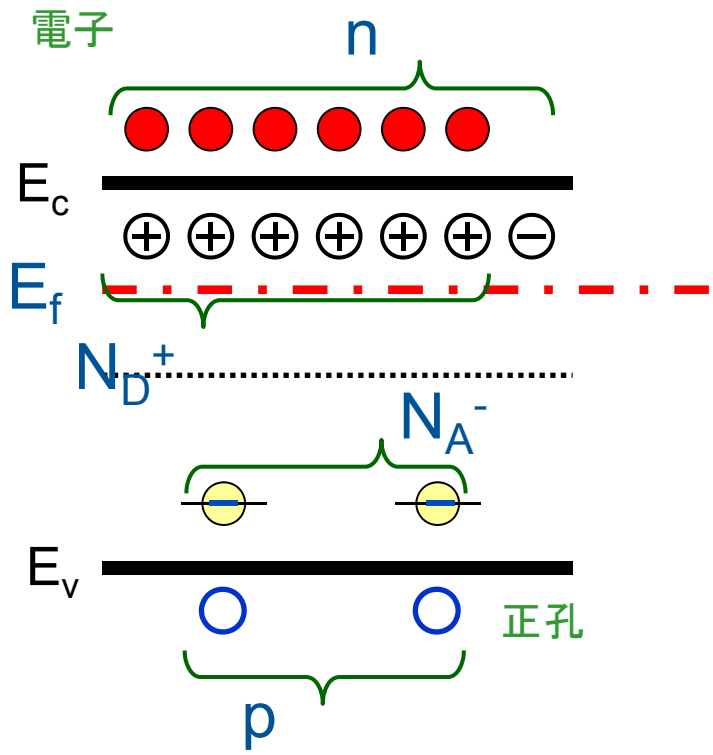
生成（発生） generation

消滅（再結合） recombination

ドリフト電流 Drift current

拡散電流 Diffusion current

Poisson's Equation



N_D : N形不純物ﾄﾞｰﾋﾟﾝｸﾞ密度
N_A : P形不純物ﾄﾞｰﾋﾟﾝｸﾞ密度
N_D^+ : ｲｵﾝ化ﾄﾞﾅｰ密度
N_A^- : ｲｵﾝ化ｱｸｾﾌﾟﾀ密度
p : 正孔密度
n : 電子密度

Poison's equation

$$\nabla^2 \varphi(x,y,z) = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$$

ρ(x): 電荷密度

$$\rho(x) = q(\underbrace{N_D^+ - N_A^-}_{\text{固定電荷}} \underbrace{+ p - n}_{\text{可動キャリア}})$$

一般的には、N_D^+, N_A^-, p, nは場所の函数となる。

半導体中の電子・正孔の運動を記述する。

1. ポアソンの方程式 Poisson’s equation
2. 電流の式 Current equation
3. 連続の式 Continuous equation
4. キャリア分布の式 Carrier distribution

- デバイスシミュレータ（Device simulator）は、これらの式を数値的に解く。

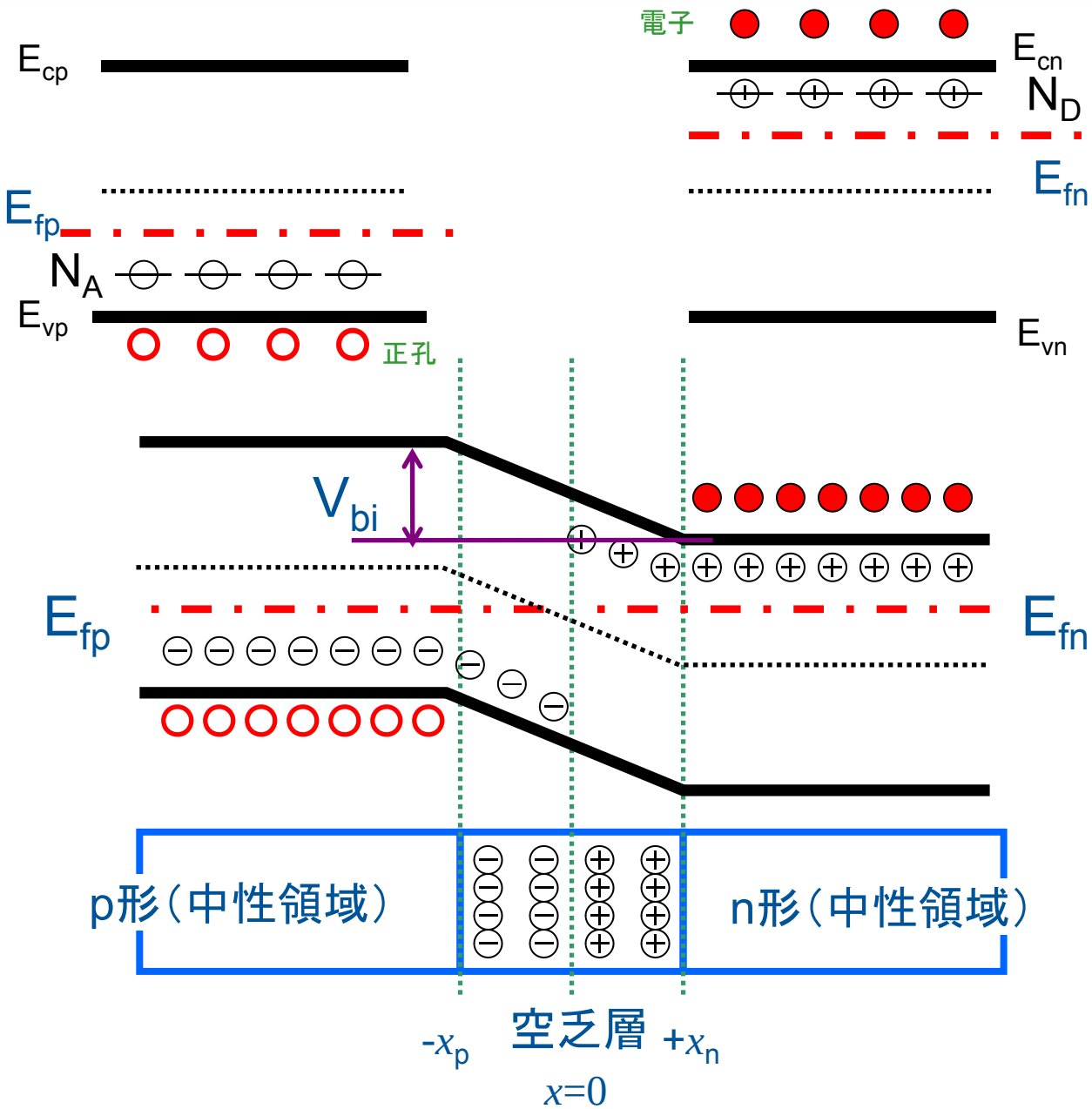
pn接合　pn junction

TOKYO TECH Pursuing Excellence

仮 定

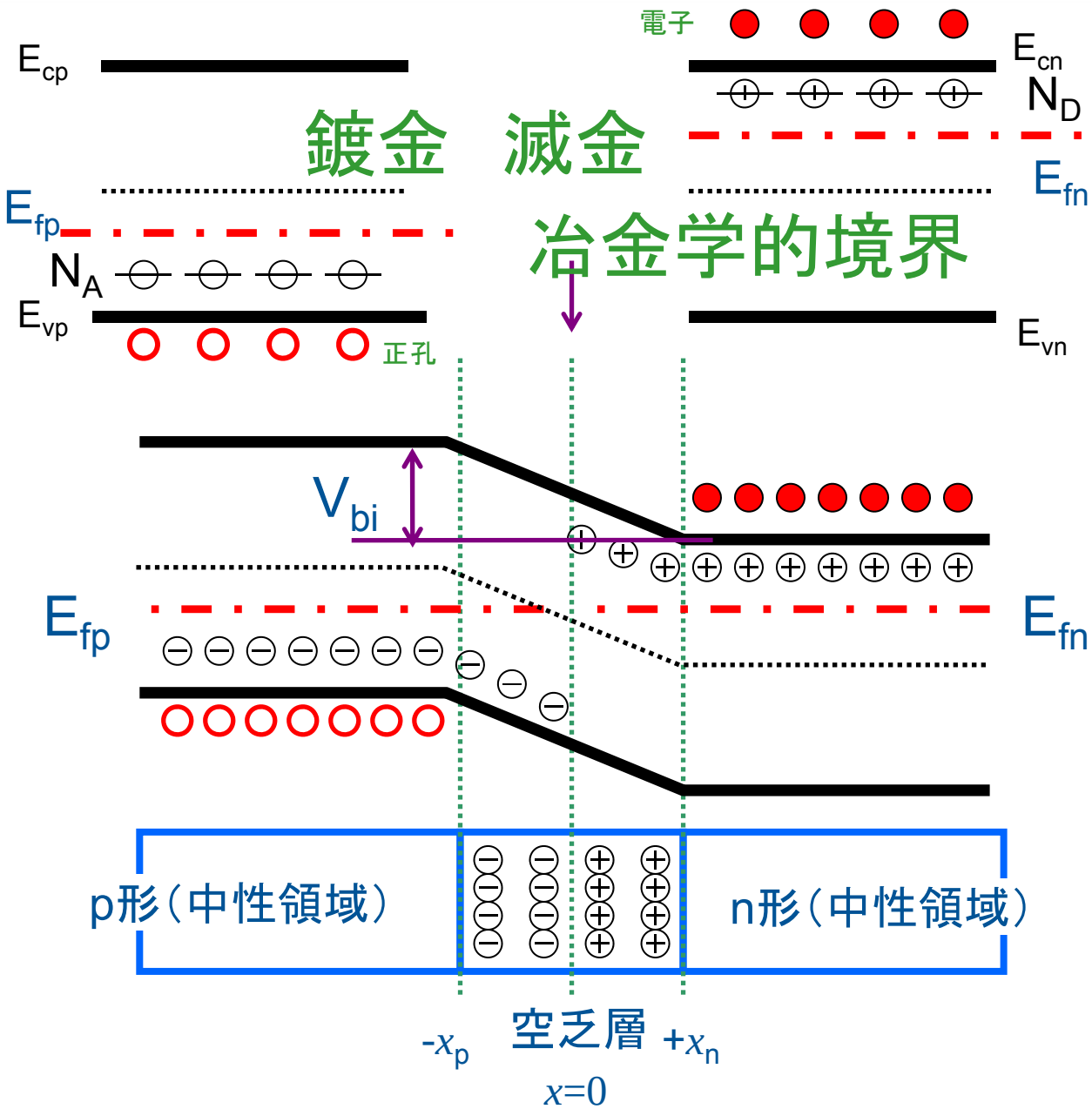
1. 急峻な階段接合。印加された電圧はすべて空乏層に印加される。
   - 空乏層以外に電界は存在しない。
2. 空乏層を介して、Boltzmannの関係が成立する。
3. 注入されたキャリアは多数キャリアに比較して少ない。（低注入条件）
4. 空乏層において、生成再結合はないとする。
   - 空乏層で正孔電流、電子電流は一定。

pn接合　pn junction



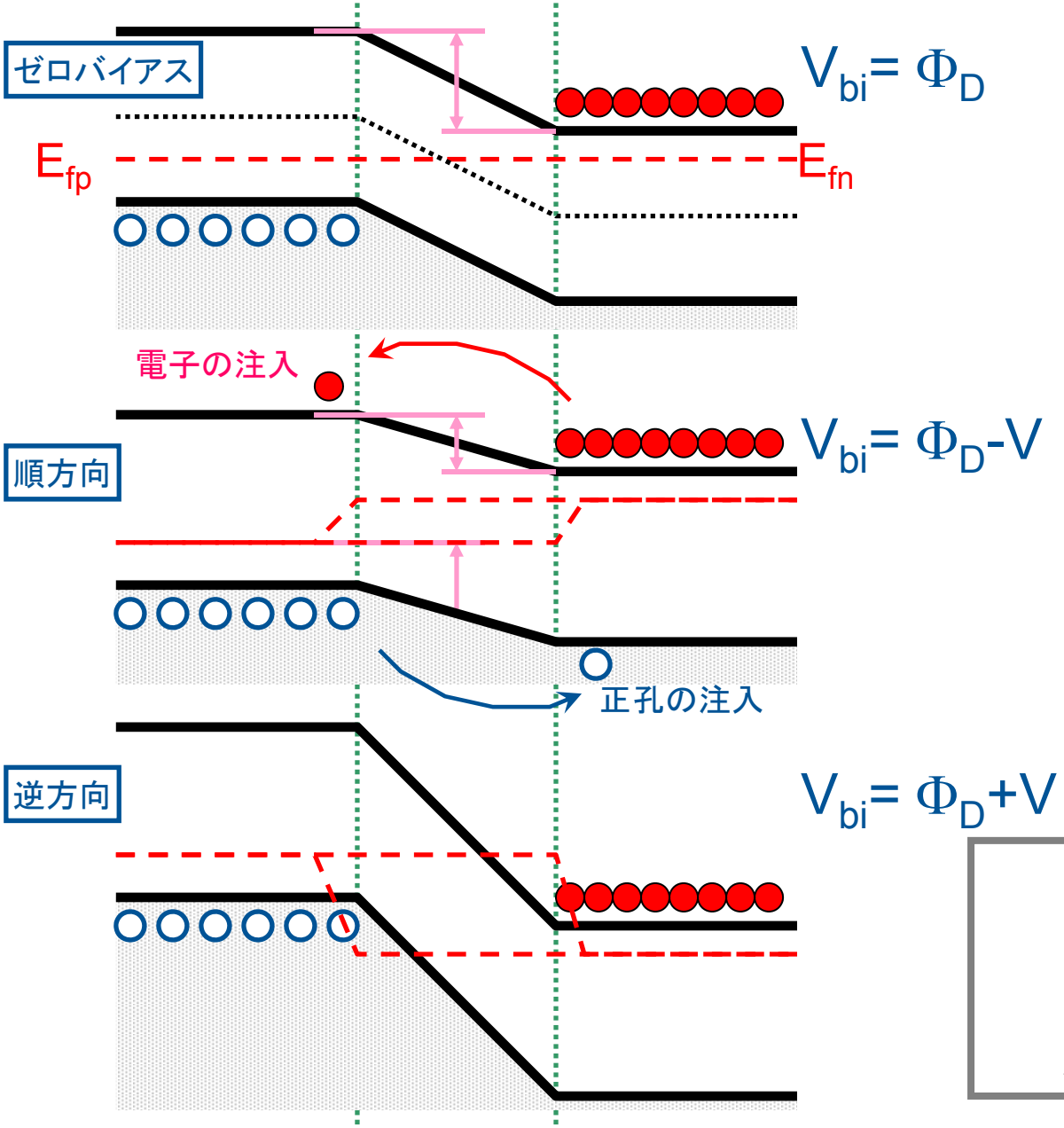
1. p形とn形半導体を接合する。P形の正孔はn形へ、n形の電子はp形半導体へ移動し、界面には電位差が生じる。
2. p形、n形半導体のフェルミ準位が一致するところで平衡に達する。（$E_{fn}=E_{fp}$）
3. その電位差：拡散電位（Diffusion potential）
4. 界面の電子、正孔が出払った領域：空乏層（Depletion layer, depletion region）

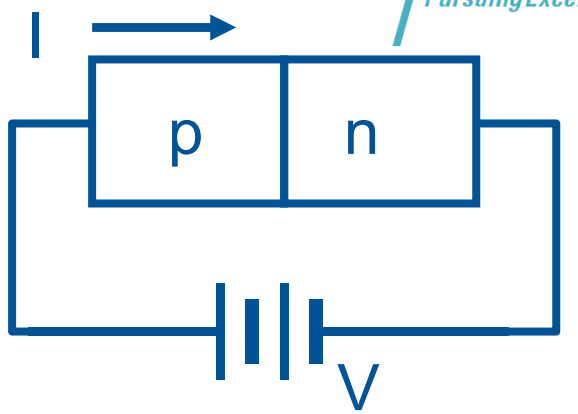
pn接合　pn junction

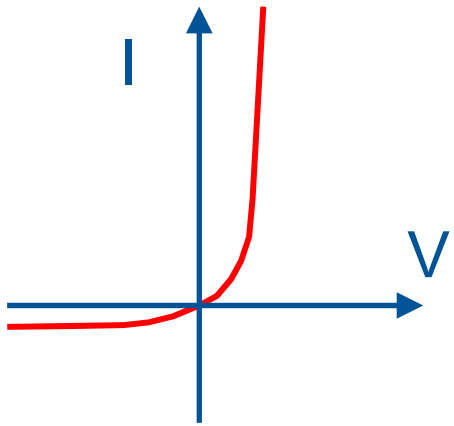


1. p形とn形半導体を接合する。P形の正孔はn形へ、n形の電子はp形半導体へ移動し、界面には電位差が生じる。
2. p形、n形半導体のフェルミ準位が一致するところで平衡に達する。（$E_{fn}=E_{fp}$）
3. その電位差：拡散電位（Diffusion potential）
4. 界面の電子、正孔が出払った領域：空乏層（Depletion layer, depletion region）

Current-voltage characteristics of pn junction







$$J = J_o \exp\left\{\left(\frac{qV}{n\,kT}\right)-1\right\}$$

$$n=1-2$$

拡散電位 Φ_{bi} の求め方（1）

TOKYO TECH Pursuing Excellence

1. 熱平衡状態で、p形及びn形のフェルミ準位が一致すると考える。

$$E_{fn} = E_i + \frac{kT}{q}\log_e \frac{n_n}{n_i} \approx E_i + \frac{kT}{q}\log_e \frac{N_d}{n_i},\ E_{fp} = E_i - \frac{kT}{q}\log_e \frac{p_p}{n_i} \approx E_i + \frac{kT}{q}\log_e \frac{N_a}{n_i}$$

$$\Phi_{bi} = \left(E_i + \frac{kT}{q}\log_e \frac{n_{no}}{n_i}\right) - \left(E_i - \frac{kT}{q}\log_e \frac{p_{po}}{n_i}\right)$$

$$= \frac{kT}{q}\log_e \frac{n_{no}\, p_{po}}{n_i^2} \approx \frac{kT}{q}\log_e \frac{N_a N_d}{n_i^2}$$

n_{no}：n形の電子密度（多数キャリア）、　N_d：n形のドーピング量

p_{po}：p形の正孔密度（多数キャリア）、　N_a：n形のドーピング量

拡散電位 Φ_{bi} の求め方（2）

TOKYO TECH Pursuing Excellence

2. 接合ができたとして、平衡状態では空乏層中に電流が流れていないと考えて、空乏層両端の電位差を求める。

$$J_n = q\mu_n nE + qD_n \cdot \frac{dn}{dx} = 0$$

$$E = -\frac{D_n}{\mu_n}\frac{1}{n}\frac{dn}{dx} = -\frac{kT}{q}\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}$$

$$where\ D_n = (kT/q)\mu_n, Einstein's\ relation$$

$$\Phi_{bi} = \int_{-x_p}^{+x_n}(-E)\,dx = \frac{kT}{q}\int_{-x_p}^{+x_n}\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}dx$$

$$= \frac{kT}{q}\int_{-x_p}^{+x_n}\frac{1}{n}dn = \frac{kT}{q}\int_{n(-x_p)}^{n(+x_n)}\frac{1}{n}dn$$

$$= \frac{kT}{q}\log_e\frac{n_{no}}{n_{po}}$$

$n_{po} = \dfrac{n_i^2}{p_{po}}$ より、$\Phi_{bi} = \dfrac{kT}{q}\log_e\dfrac{n_{no}\,p_{po}}{n_i^2}$

$$\Phi_{bi} = \frac{kT}{q}\log_e\frac{n_{no}}{n_{po}}, or\ \Phi_{bi} = \frac{kT}{q}\log_e\frac{p_{po}}{p_{no}}$$

⇩

$$n_{po} = n_{no}\exp\left(-\frac{q\Phi_{bi}}{kT}\right),\ or$$

$$p_{no} = p_{po}\exp\left(-\frac{q\Phi_{bi}}{kT}\right)$$

$$J_n = q\mu_n nE + qD_n \cdot \frac{dn}{dx} = 0$$

$$E = -\frac{D_n}{\mu_n}\frac{1}{n}\frac{dn}{dx} = -\frac{kT}{q}\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}$$

$$\text{where } D_n = (kT/q)\mu_n, \text{Einstein's relation}$$

$$\Phi_{bi} = \int_{-x_p}^{+x_n}(-E)\,dx = \frac{kT}{q}\int_{-x_p}^{+x_n}\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}dx$$

$$= \frac{kT}{q}\int_{-x_p}^{+x_n}\frac{1}{n}dn = \frac{kT}{q}\int_{n(-x_p)}^{n(+x_n)}\frac{1}{n}dn$$

$$= \frac{kT}{q}\log_e\frac{n_{no}}{n_{po}}$$

$$n_{po} = \frac{n_i^{\ 2}}{p_{po}}$$ より、 $$\Phi_{\mathrm{bi}} = \frac{kT}{q} \log_e \frac{n_{no}\ p_{po}}{n_i^{\ 2}}$$

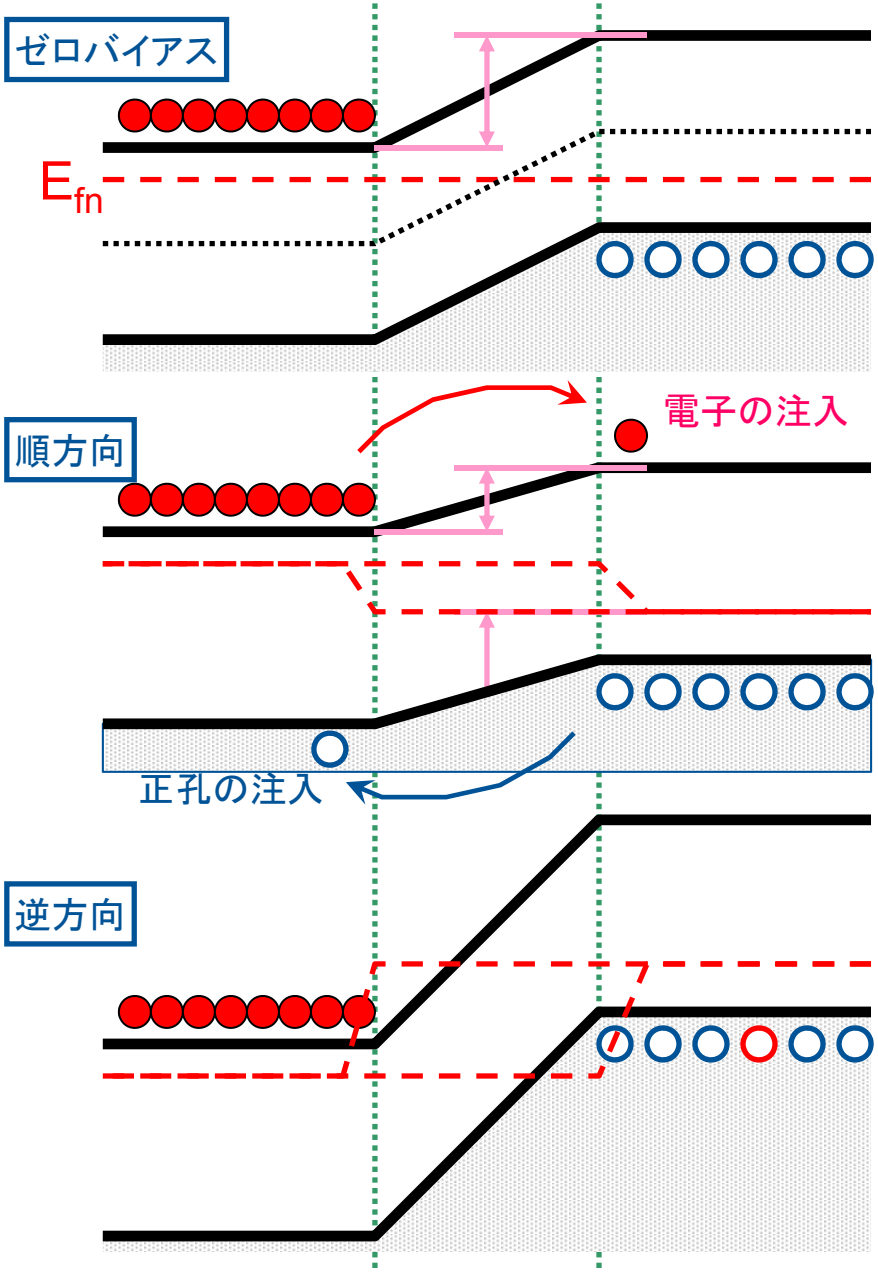
$$\Phi_{bi} = \frac{kT}{q} \log_e \frac{n_{no}}{n_{po}} \text{ , or } \Phi_{bi} = \frac{kT}{q} \log_e \frac{p_{po}}{p_{no}}$$

$$\Downarrow$$

$$n_{po} = n_{no} \exp\left(-\frac{q\Phi_{bi}}{kT}\right), \text{ or}$$

$$p_{no} = p_{po} \exp\left(-\frac{q\Phi_{bi}}{kT}\right)$$

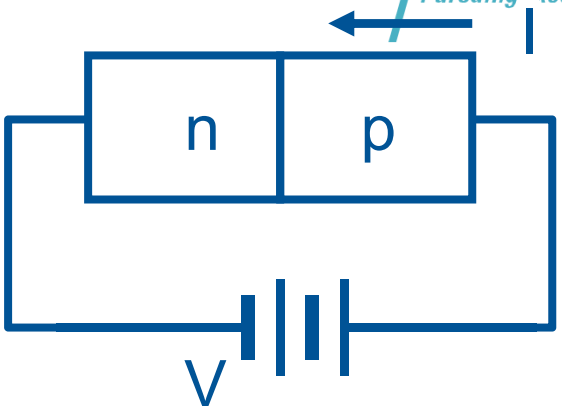
Current-voltage characteristics of pn junction

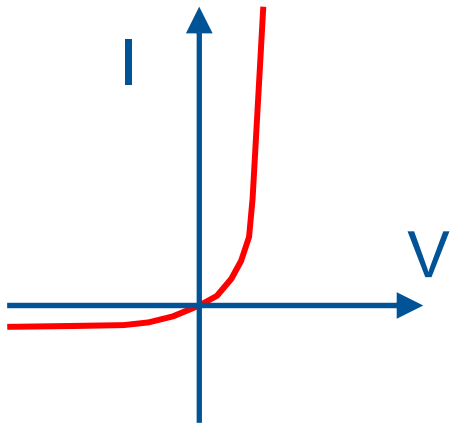


$V_{bi} = \Phi_D$

$V_{bi} = \Phi_D - V$

$V_{bi} = \Phi_D + V$





$$J = J_o \exp\left\{\left(\frac{qV}{n\,kT}\right) - 1\right\}$$

$$n = 1 - 2$$