

第 6 回講義内容

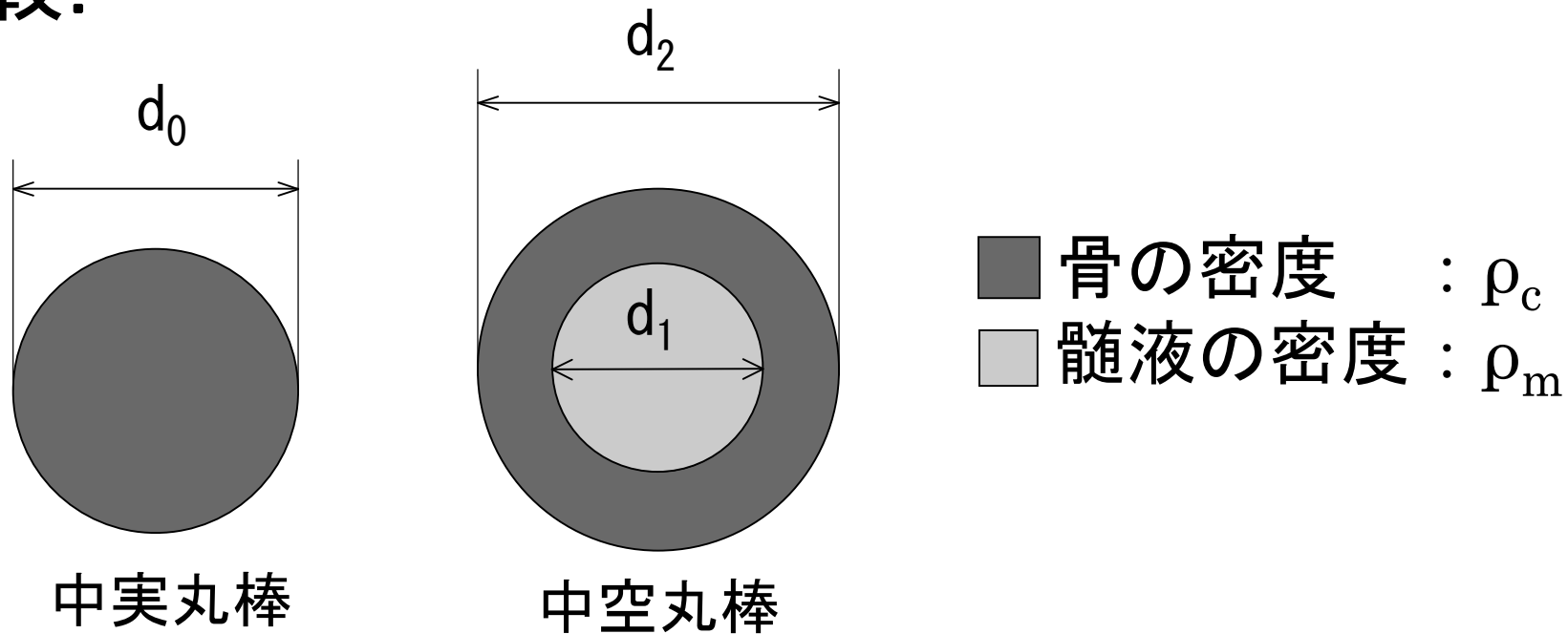
1. 前回ホームワークの解説
2. 骨の形（文献確認）
3. 長骨の半径と厚さの最適性に関する理論
 - 3.1 曲げ強度を基準にしたモデル（前回）
 - 3.2 たわみを基準にしたモデル（今回）
 - 3.3 衝撃荷重を基準にしたモデル（今回）
4. 骨のリモデリング
5. ホームワーク

配付資料の図

長骨の直径と厚さの関係
“BONES” by J.D.Currey

質量比較のモデル化

方針：構造体としての強度が同じという条件下で中実丸棒を基準に中空丸棒の質量を比較.



曲げ強度を基準にした場合

曲げモーメント T によって発生する応力

$$\sigma = \frac{T}{Z}$$

断面係数

中実の場合： $Z_0 = I_0 / \left(\frac{d_0}{2} \right) = \frac{\pi}{32} d_0^3$

ただし,

$$\left(I_m = \frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4) \right)$$

中空の場合： $Z_m = I_m / \left(\frac{d_2}{2} \right) = \frac{\pi}{32} d_2^3 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right)$

強度を同じにする条件

$$Z_0 = Z_m$$

$$\therefore d_0^3 = d_2^3 \left\{ 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right\}$$

中実に対する中空の質量比

$$\frac{M_m}{M_0} = \frac{\frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) \rho_c + \frac{\pi}{4} d_1^2 \rho_m}{\frac{\pi}{4} d_0^2 \rho_c} \quad (\text{単位長さ当たり})$$

$$= \frac{\rho_c \left\{ 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right\} + \rho_m \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2}{\rho_c \left\{ 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right\}^{\frac{2}{3}}}$$

質量比が最小となる R/t

骨密度 $\rho_c=2$, 髄液の密度 $\rho_m=1$ とし, $d_1/d_2=x$ とおく.

$$\frac{M_m}{M_0} = \frac{2-x^2}{2(1-x^4)^{\frac{2}{3}}}$$

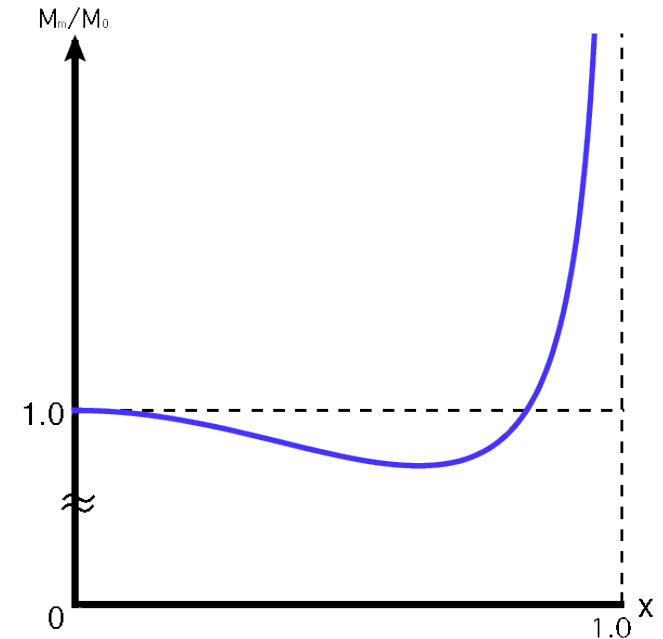
x は 0 から 1 の範囲で変化

$x=0$ (中実)で $M_m/M_0=1$

$x \rightarrow 1$ (極めて薄い中空)で $M_m/M_0 \rightarrow \infty$

最小値を求めると

$$x = \sqrt{4 - \sqrt{13}} = 0.628 \quad R/t \doteq 2.69$$



たわみ量を基準にした場合

はりのたわみの方程式

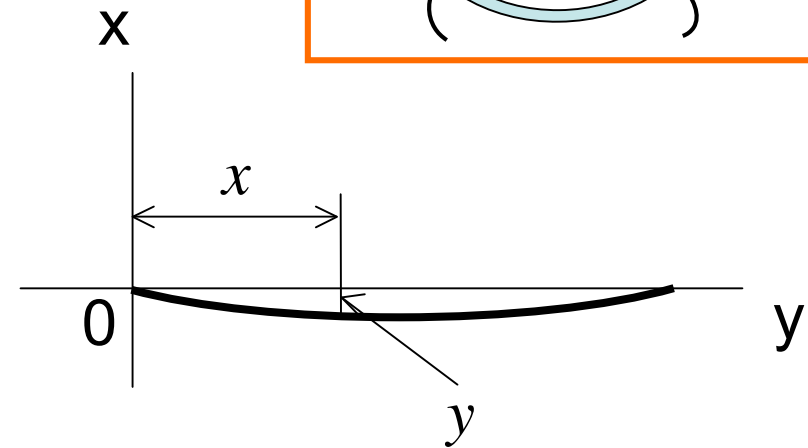
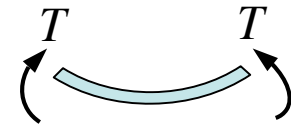
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{T}{EI}$$

$$\text{たわみ量} \propto I^{-1}$$

$$\therefore I_0 = I_m$$

$$d_0^4 = d_2^4 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right)$$

曲げモーメントの正方向



たわみ量を基準にした場合

$$\frac{M_m}{M_o} = \frac{\rho_c (d_2^2 - d_1^2) + \rho_m d_1^2}{\rho_c \sqrt{d_2^4 - d_1^4}}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{\rho_m}{\rho_c} - 1 \right) \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4}}$$

$\rho_c=2, \rho_m=1, d_1/d_2=x$ より

$$\frac{M_m}{M_o} = \frac{1 - 0.5x^2}{\sqrt{1 - x^4}}$$

M_m/M_o が最小となる
 R/t が求められる。

衝撃荷重を基準にした場合

衝撃荷重で発生する応力値の見積り

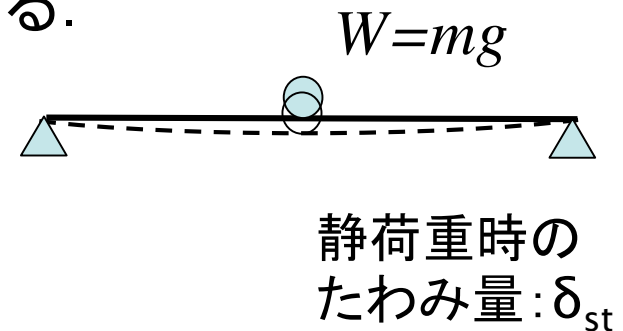
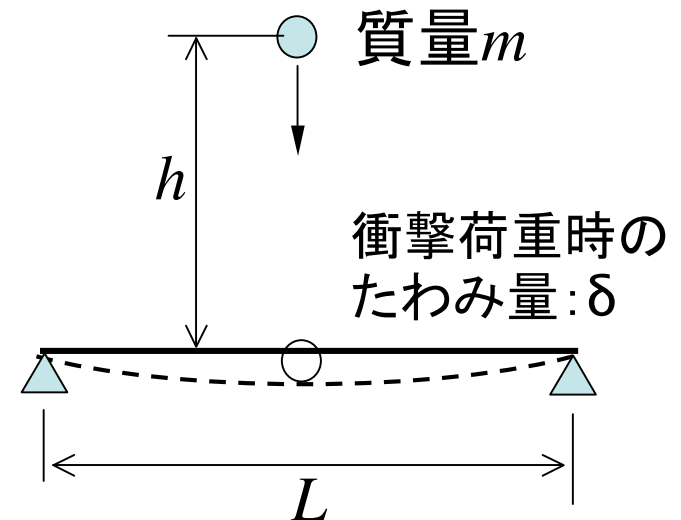
位置エネルギーがはりの弾性エネルギーに全て変換された時が応力の最大値.

$$mg(h + \delta) \approx mgh = \frac{1}{2} k \delta^2$$

はりのばね定数 k は以下の関係より求まる.

$$W = mg = k \delta_{st}$$

$$\text{ここで } \delta_{st} = \frac{mgL^3}{48EI}$$



衝撃荷重を基準にした場合

衝撃荷重時に発生する応力もたわみ量に比例して増大するので

$$\sigma = \frac{\delta}{\delta_{st}} \sigma_{st}$$

ここで静荷重時に発生する応力は $\sigma_{st} = \frac{T}{Z} = \frac{mgL}{4} \frac{d}{2I}$

以上より衝撃荷重時の応力は以下のように見積もられる.

$$\sigma = \sqrt{\frac{6mghEd^2}{4LI}} \propto \frac{d}{\sqrt{I}}$$

したがって中実丸棒と中空丸棒に成立すべき条件式は

$$\frac{d_0}{\sqrt{I_0}} = \frac{d_2}{\sqrt{I_m}} \quad \text{ただし} \quad I_m = \frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4)$$

衝撃荷重を基準にした場合

$$\frac{d_0}{\sqrt{I_0}} = \frac{d_2}{\sqrt{I_m}} \quad \text{ただし} \quad I_m = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4)$$

上記の関係式から M_m/M_0 を $x(=d_1/d_2)$ の関数であらわせる。

出席点: M_m/M_0 を x の関数であらわし、 M_m/M_0 が最小となる R/t を求めよ。

余裕がある人は、たわみ量を基準にした場合についても求めてみよ。

骨のバイオメカニクスの草分け的研究

Wolffは、骨梁構造が力学的に意味があることを指摘.

Rouxは、Wolffの考えを発展させ、Functional Adaptation (機能的適応)の概念を提唱し、骨の最小材料最大強度説 (maximum-minimum law)を唱えた.

関連文献:

Biomechanics, edited by Y.C.Fung, N.Perrone and M.Anliker,
PRENTICE-HALL, INC.

<http://herkules.oulu.fi/isbn9514271246/html/c217.html>

骨

わずか3ヶ月の間に骨の断面積
は劇的に変化する.

A.E.Goodship et al., Journal of Bone
and Joint Surgery (1979)

配付資料の説明

Osteoblast 骨芽細胞

(Osteo 骨, blast 芽)

骨を付加する働きがある.

Osteoclast 破骨細胞

(Osteo 骨, clast 分解, 碎屑物 (さいせつぶつ))

破骨細胞は「骨を削る」というよりは「骨を溶かして吸収する」という表現の方が適切.

骨組織の構成

骨組織は鉄筋コンクリートの構造に似ている。

コラーゲン（タンパク質） + リン酸カルシウム



鉄筋

+



コンクリート

人工物と異なる点：骨は生きている（リモデリングの機能がある）！

リモデリングの機能があるため、骨は「最小材料最大強度」の形をしているという説をRouxが唱えた。

骨のリモデリング

宿題配付資料

BIOMECHANICS, edited by Y.C.Fung より

第 6 回講義おわり