

第4回講義内容

1. フラクタルモデルの続き（前回資料参照）
2. 出席点の解説（動物の鼓動数について）
3. 枝分かれの法則
 - 3.1 樹木の枝分かれ（2.5乗則の復習）
 - 3.2 血管の3乗則
4. ホームワーク（血管の分岐角度）

樹木の枝の分岐則 (2.5乗則)

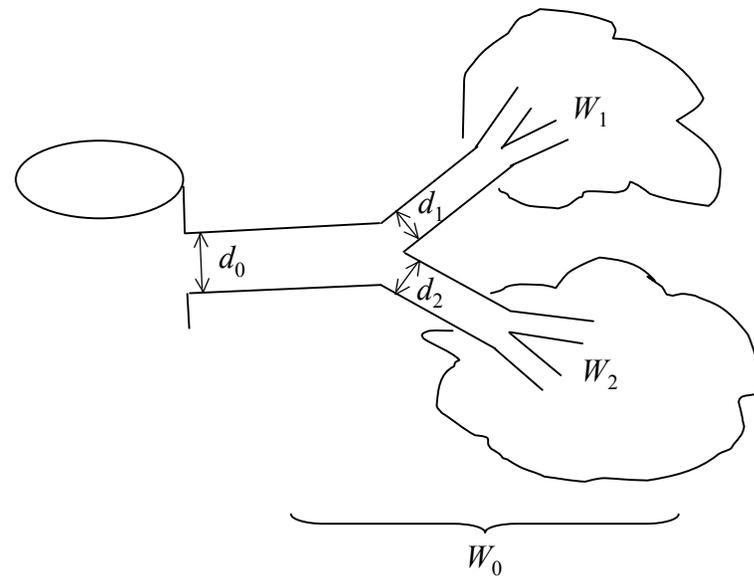
枝の重量と直径の関係

$$W \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



血管分岐の法則（3乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \quad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

フラクタルモデルでは、 $n=2$ と仮定しているが、計測から推定される指数は $n=3$ である。

指数が2と3でどんな違いが出るのか。

$n=2$ ならば分岐後も同じ流速になる。

$n=3$ の場合には分岐後の流速はどうなる？

血管分岐の法則（3乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \quad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

- 血液供給は諸器官の活動を維持するのに必須.
→多すぎると無駄, 少なすぎると支障
→したがって生命維持には適度な血液流量が必要
→何らかの法則性が成立していると予想.

Murray の最小仕事モデル

基本的な考え方（一本の血管について考える）

- ・ 血管半径が小さすぎると
 - 粘性抵抗が増大 → 機械的エネルギーが増大. (not good)
 - 管内血液が減少 → 化学的エネルギーが減少. (good)
- ・ 血管半径が大きすぎると
 - 粘性抵抗が減少 → 機械的エネルギーが減少. (good)
 - 管内血液が増大 → 化学的エネルギーが増大. (not good)

※ 化学的エネルギー：血管内の血液を活性化させておくのに必要なエネルギー。管内血液量に比例（小さい方がよい）。

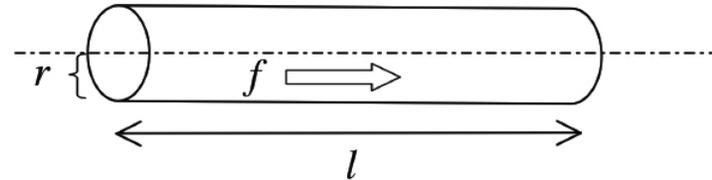
機械的エネルギー E_m と 化学的エネルギー E_c の総和の最小化

Murray の最小仕事モデル (続き)

$$F = E_m + E_c = \Delta p f + kV \quad (k \text{ は定数})$$

$$f = \frac{\Delta p \pi r^4}{l 8\mu} \quad \text{より}$$

$$F = \frac{8\mu f^2 l}{\pi r^4} + k\pi r^2 l$$



仮定：血管内はポアズイユ流れ
(両端の圧力差を Δp とする.)

F の最小値を求めるために F を r で偏微分すると以下の関係式が得られる.

$$\square = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \text{const.} \quad \leftarrow \text{この計算が出席点}$$

機械的エネルギー E_m

Δpf が単位時間当たりの機械的エネルギーに相当する理由

◎仕事は Fx で定義される.

◎断面積 A の管内の流体が Δt に Δx だけ押し出されている状況を考える.

入口側で液体に対してなされる仕事は $p_1 A \Delta x$.

出口側の面では, 圧力 p_2 が常に加わっている状態なので,
流体が外部に対して行う仕事は $p_2 A \Delta x$.

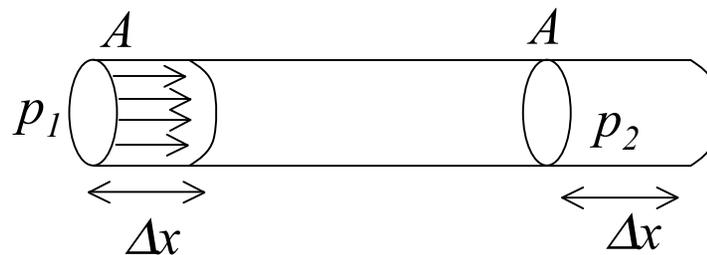
したがって, 管内で流体の運動に必要なエネルギーは

$$p_1 A \Delta x - p_2 A \Delta x = (p_1 - p_2) A \Delta x = \Delta p A \Delta x$$

単位時間あたりでは

$$\Delta p A \Delta x / \Delta t = \Delta p f$$

となる.



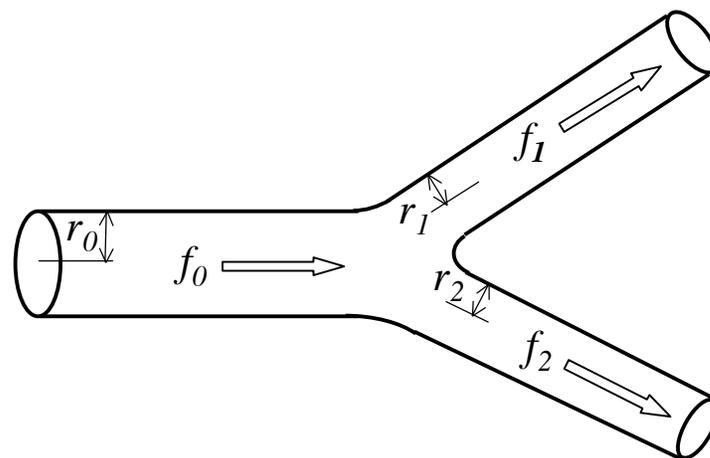
Murray の最小仕事モデル (続き)

入口側, 出口側の流量を f_0, f_1, f_2 とすると

$$\frac{f_0}{r_0^3} = \frac{f_1}{r_1^3} = \frac{f_2}{r_2^3}$$

$$f_0 = f_1 + f_2 \quad \text{より}$$

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$



第4回講義おわり