生体工学第一　　　　　　　2012.4.25

第３回講義内容

１．前回出席点の確認
２．第一回宿題の解説
３．出席点の問題（鼓動のアロメトリー）
４．0.75乗則の説明：もう一つの学説
　　フラクタル構造に着目
５．ホームワーク（フラクタル）

2.5乗則の導出

キーポイント:

木材の強度は植物の種類、枝の大小によらず一定

⇩

最大応力となる箇所での条件式

⇩

$$M \propto d^{2.5}$$

枝は太くなるほど断面が楕円形になる傾向がある。なぜだろう？

出席点：鼓動のアロメトリー

第１回宿題の文章には鼓動に関する記述がある．記載された数値から鼓動回数 h[回/min] と生物体の質量M_b[g]に関するアロメトリーを議論できる．

トガリネズミ	1000回/min.	体重 2-3 g
ゾウ	30回/min.	体重3ｔ（英文では5ｔ）
ハツカネズミ	600回/min.	体重　30 g

どんなアロメトリーが成立するか推定しなさい．

基礎代謝量と生物の質量の関係（復習）

$$P \propto M_b^{0.75}$$

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

熱放散の考え方では0. 75でなく2/3=0. 67となる.

弾性相似則を適用すると3/4=0. 75を導ける（前回）.

毛細血管のフラクタル構造に着目（今回）.

弾性相似則モデルについて（復習）

上位概念	地上の全ての動物は重力の影響を受けており，身体の姿勢維持には筋活動が必要である.
⇕	
法則性の考察	重力に抗して体形を維持するパワーの見積もりをM_bで表現する. （0.75乗則を説明するためのモデル化）
⇕	
現象の観察	大きい動物ほど胴体が体長に対して太い. （姿勢維持に関係．）

0.75乗則：もう一つの学説

G.B.West, J.H.Brown and B.J.Enquist,
Science, Vol.276, pp.122-126(1997)

毛細血管のフラクタル構造に注目して0.75乗則を導出する.

この学説の上位概念は何か？

（動物に共通した特徴は何か？）

基本的な考え方

１．ミクロレベルの血流に注目

　動物の大小を問わず細胞組織のレベルでは同じ特性をもっているはずである．特に血液から細胞に供給される酸素や栄養の量は同じ性能になっていると予想される．

２．血流を供給する血管の構造

　血管の構造は分岐しながら管径および長さが小さくなる．動物の大きさによって分岐回数に差があるにしても末端の毛細血管は同じスケール，特性になっていると予想される．

３．血管構造の規則性

　血液が細胞に酸素や栄養を効率的に供給するには血管構造にそれなりの形の秩序があると予想される．この形の秩序を示す数学的表現としてフラクタルの考え方を利用する．

フラクタルについて

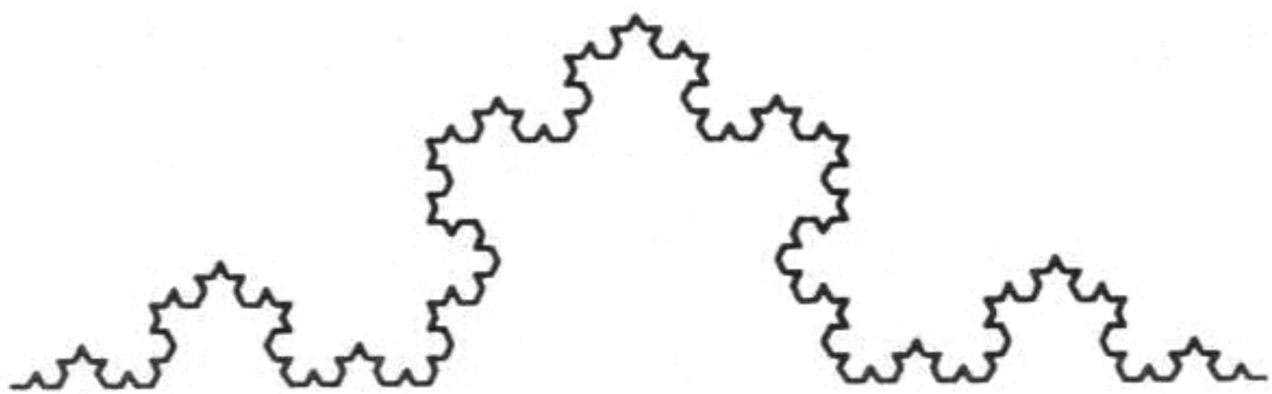
マンデルブロー（Mandelbrot)が1975年に提唱. 物がこわれて不規則な状態になったという語源（fractus）から命名.

一見すると不規則な形(パターン)でも規則性が見いだされる.

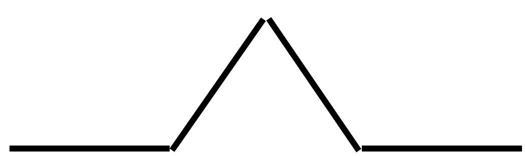
→自己相似性に注目した数学表現

コッホ曲線（自己相似形）

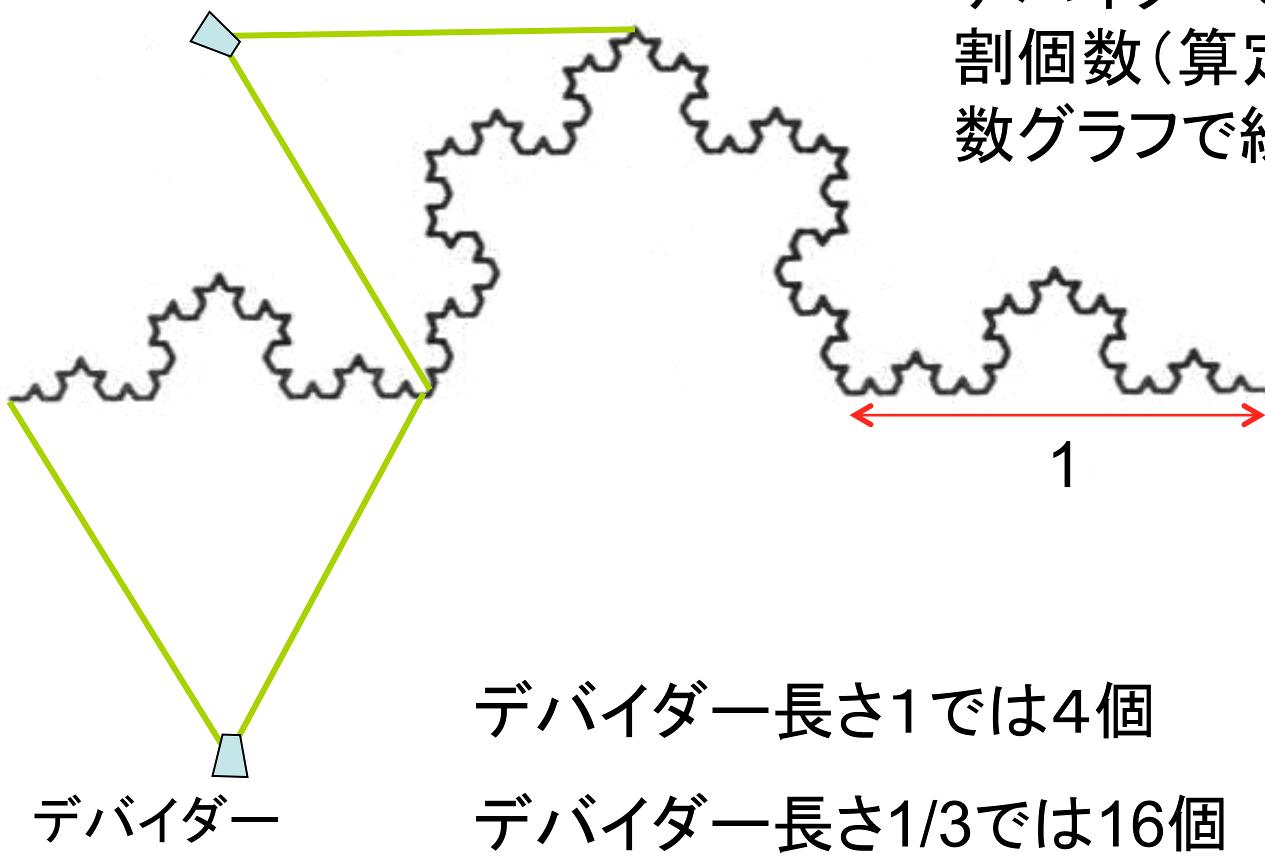
全体の長さを1/3にするとパターンが一致する．縮小図形４個で全体が構成.



基本形



フラクタル図形の性質



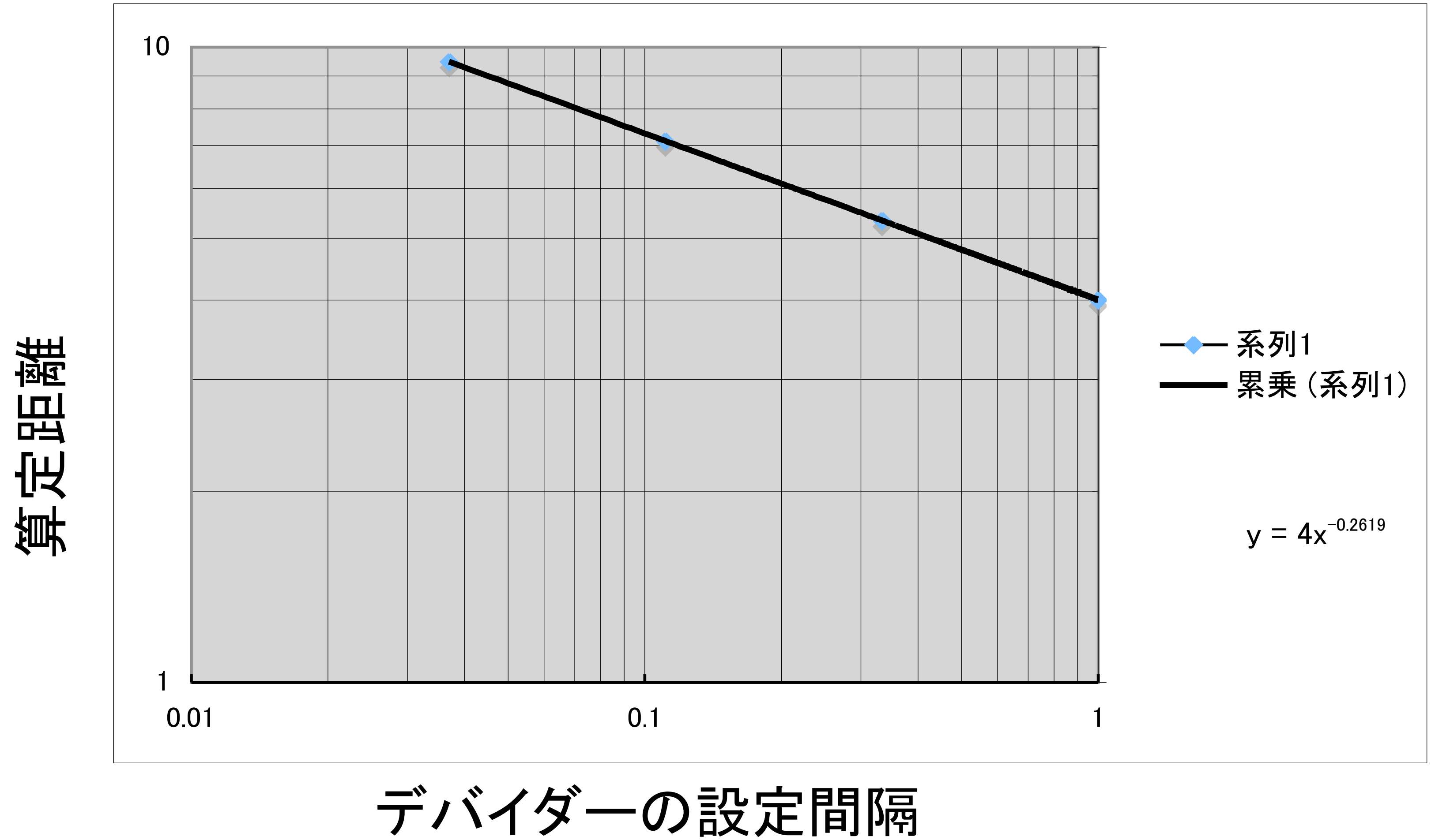
デバイダーの設定間隔と分割個数(算定距離)には両対数グラフで線形性がある.

デバイダー長さ1では4個 → 距離 4

デバイダー長さ1/3では16個 → 距離 5.33

デバイダー長さ1/9では64個 → 距離 7.11

デバイダーの設定間隔と分割個数（算定距離）
には両対数グラフで線形性がある.



自然界のフラクタル

「ゆらぎの世界」武者利光（ブルーバックス）より

毛細血管の構造

http://www.rci.rutgers.edu/~uzwiak/AnatPhys/Blood_Vessels.html

http://www.columbia.edu/itc/gsas/g6001/bhattacharya/PulCircSlides_files/slide0105.html

0.75を導出するために必要な仮定

１. 血管の構造は自己相似性（フラクタル）をしている.

２. 血管断面の総面積は各分岐レベルで同じである.

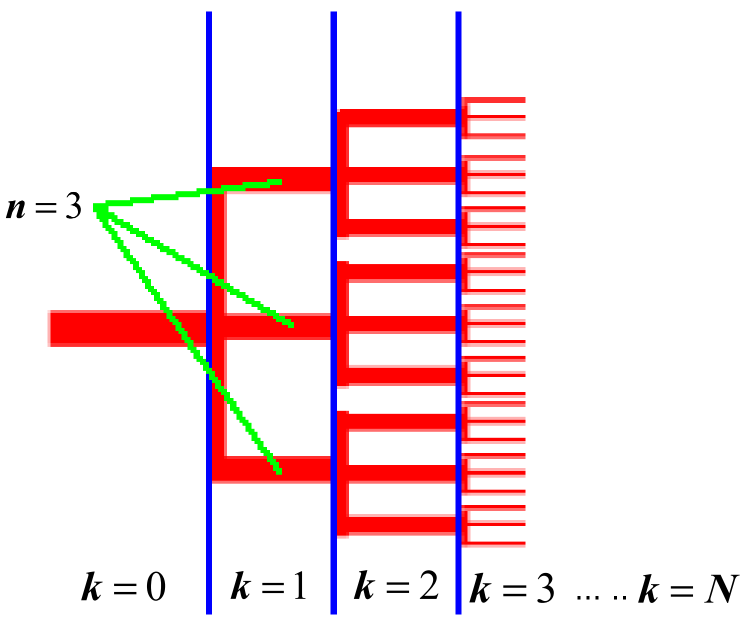
３. 血管は三次元空間に充填的に張りめぐらされている.
（生体組織の活動を維持するため. ）

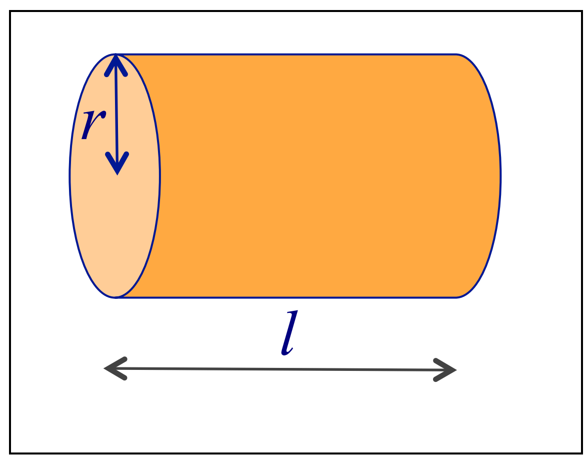
４. 毛細血管は動物によらず同じスケール, 特性になっている.

５. 生物体の質量は体内の総血液量に比例する.

仮定1：血管はフラクタル構造

血管は自己相似性のフラクタル構造をしている．つまり各分岐レベルで同様な分岐数で分岐し，血管の径，長さは同じ比率で縮小する．





$$\beta = \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

$$\gamma = \frac{l_{k+1}}{l_k}$$

$k=N$ 回目の分岐で毛細血管となる．

仮定２：血管断面の総面積は同じ

血管断面の総面積は各分岐レベルで同じ.
（血流の面積が一定になるように分岐．）

$$N_k \pi r_k^2 = N_{k+1} \pi r_{k+1}^2$$

$$\boxed{\beta = \frac{r_{k+1}}{r_k} = n^{-1/2}}$$

N_k: 分岐 k 回目の血管総数

r_k: k 回目の血管半径

n: 分岐本数

仮定３　血管は三次元的に空間を充填

血管は生体組織の活性化を維持するために三次元空間に張りめぐらされ，細胞の活動を支援している.

生体組織への酸素，栄養供給能力は血管長さが支配的($\because r<<l$).

三次元フラクタル構造より分岐 k 回目での血管が受け持つ生体組織の体積は k によらず大体等しいとすると

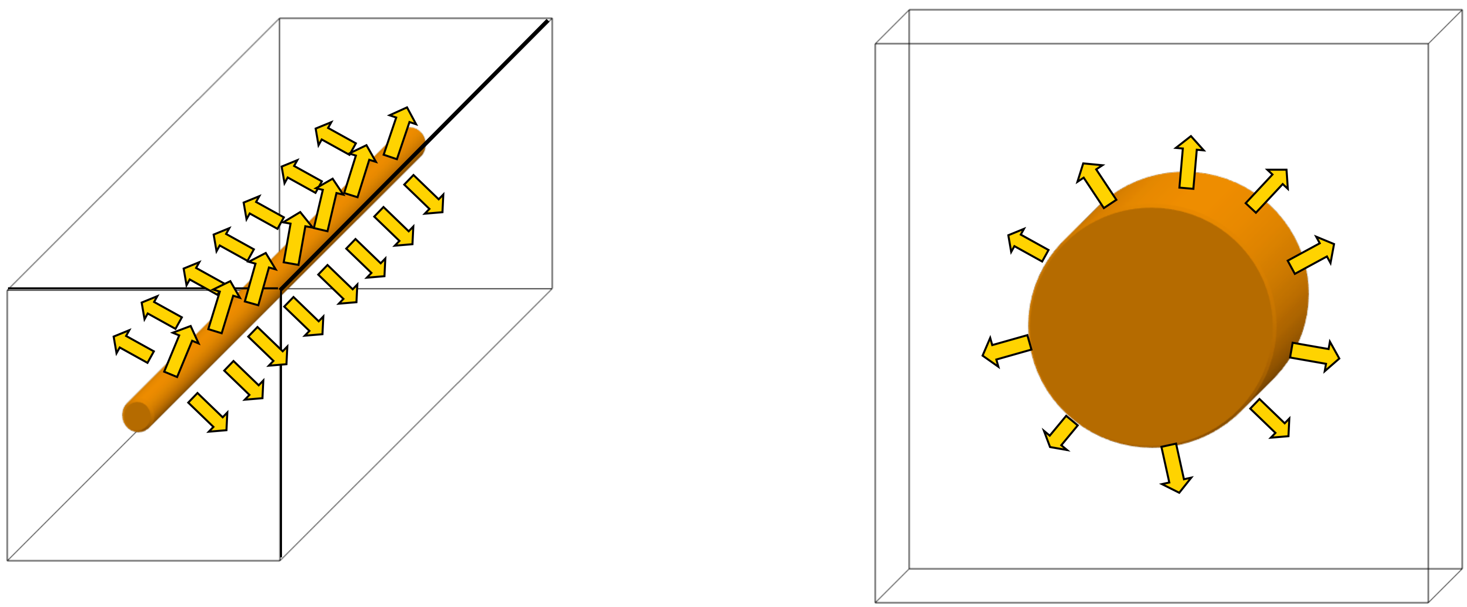
$$N_k l^3_{\ k} \approx N_{k+1} l^3_{\ k+1}$$

$$\frac{l^3_{\ k}}{l^3_{\ k+1}} \approx n$$

$$\boxed{\gamma = \frac{l_{k+1}}{l_k} \approx n^{-1/3}}$$

“The fractal geometry of nature”, by Mandelbrot より

血管長さが組織の栄養補給に支配的なのはなぜ？

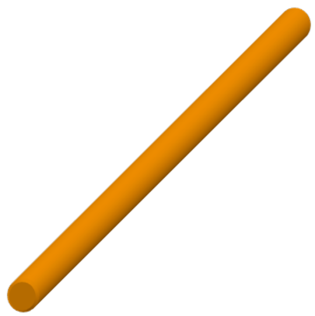


生体組織に栄養がいきわたるイメージ図

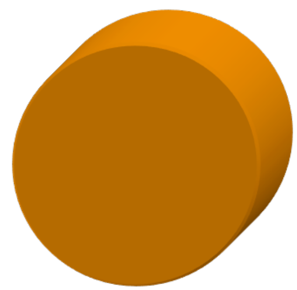
血管表面積が栄養供給能力を決定づけている.

血管壁面の面積の見積もり

血管内の血液量が等しいとした時の血管壁面の面積



半径: R
長さ: L
体積: $\pi R^2 L$
壁面面積: $2\pi RL$



半径: 10R
長さ: 0.01L
体積: $\pi R^2 L$
壁面面積: $2\pi \times 10R \times 0.01L$
$= 0.1 \times 2\pi RL$

組織に栄養供給するには血管が細い方が優位に働く

仮定４：毛細血管のスケール，特性は同じ

毛細血管の直径，長さ，平均流速は動物によらず一定.
細胞レベルでは酸素や栄養を供給する性能（単位体積当たり）は同じと仮定.

仮定５：生物体の質量は総血液量に比例.

血液量が多いほど多くの生体組織を維持可能.
（活動可能な生体組織の体積は総血液量に比例する.）

$$V_b = 65.6 M_b^{1.02}$$

Blood volume: V_b, in ml,
Body mass: M_b, in kg
Reported by Stahl (1967)

0.75の導出（続き）

血液量の見積もり

$$V_b = \sum_{k=0}^{N} N_k V_k = \sum_{k=0}^{N} n^k \pi r_k^2 l_k$$

$$= \pi r_0^2 l_0 \sum_{k=0}^{N} (\beta^2 \gamma n)^k$$

$$= \pi r_N^2 l_N (\beta^2 \gamma)^{-N} \frac{1-(\beta^2 \gamma n)^{N+1}}{1-\beta^2 \gamma n}$$

$\beta^2 \gamma n < 1,\ N \approx 22 \sim 34$ $\rightarrow$ 分子の部分≒1，分母は定数.

$\therefore V_b \propto \left(\beta^2 \gamma\right)^{-N} V_N \propto n^{\frac{4}{3}N} \propto M_b$ （毛細血管内の体積 V_N は定数）

0.75の導出（続き）

基礎代謝量Pは，単位時間あたりの血液流量（総血液量ではない）に比例すると考えるのが妥当．

$$\dot{Q}_0 = N_k \dot{Q}_k = N_k \pi r_k^2 \overline{v}_k = N_N \pi r_N^2 \overline{v}_N \propto n^N$$

（毛細血管での単位時間当たりの流量は動物によらず同じと仮定）

$$\therefore P \propto \dot{Q}_0 \propto n^N$$

$\dot{Q}_k$：分岐 k 回目での血管1本当たりの流量

$\overline{v}_k$：平均流速

$M_b \propto n^{\frac{4}{3}N}$ より

$$\boxed{P \propto M_b^{\frac{3}{4}}}$$

フラクタル構造モデルについて（まとめ）

上位概念	どの動物も毛細血管が生命活動に重要な役割を果している.（生体組織レベルで支配的に作用.）
⇕	
法則性の考察	活動エネルギー（血液流量）とM_bを毛細血管数で表現する. （0.75乗則を説明するためのモデル化）
⇕	
現象の観察	血管は動物によらず似たような構造になっている.

※フラクタル構造モデルも完璧ではない.（次回説明）

第３回講義おわり