

第2回講義内容

1. 出席点の問題:
枝の2.5乗則 (出席点)
2. 基礎代謝率
3. 0.75乗則: 熱放散による説明 (前回の復習)
4. 0.75乗則: 二つの学説
 - 4.1 弾性相似則モデル
 - 4.2 フラクタルモデル (次回に講義)

出席点：枝の2.5乗則を示せ

枝と重量と周径の実測結果
Murray(1927)

配付資料参照

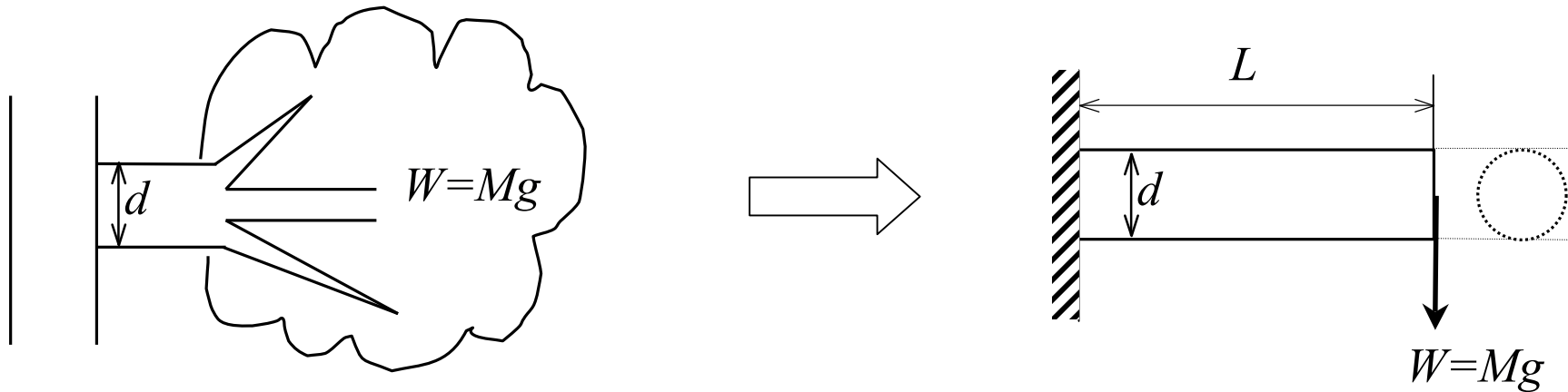
枝の重量と
直径の関係

$$W \propto C^{2.5}$$



$$M \propto d^{2.5}$$

枝の力学モデル



$$\sigma = \frac{MgL}{Z} = \frac{WL}{Z} \quad (1)$$

$$Z = \text{断面係数} \quad (2)$$

$$W = Mg = \frac{\pi d^2}{4} L \rho g \quad (3)$$

Mとdの関係式
(Lは消去される)

ρ : 枝を直はりとしてモデル化したときの平均質量密度 [kg/m³]

樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

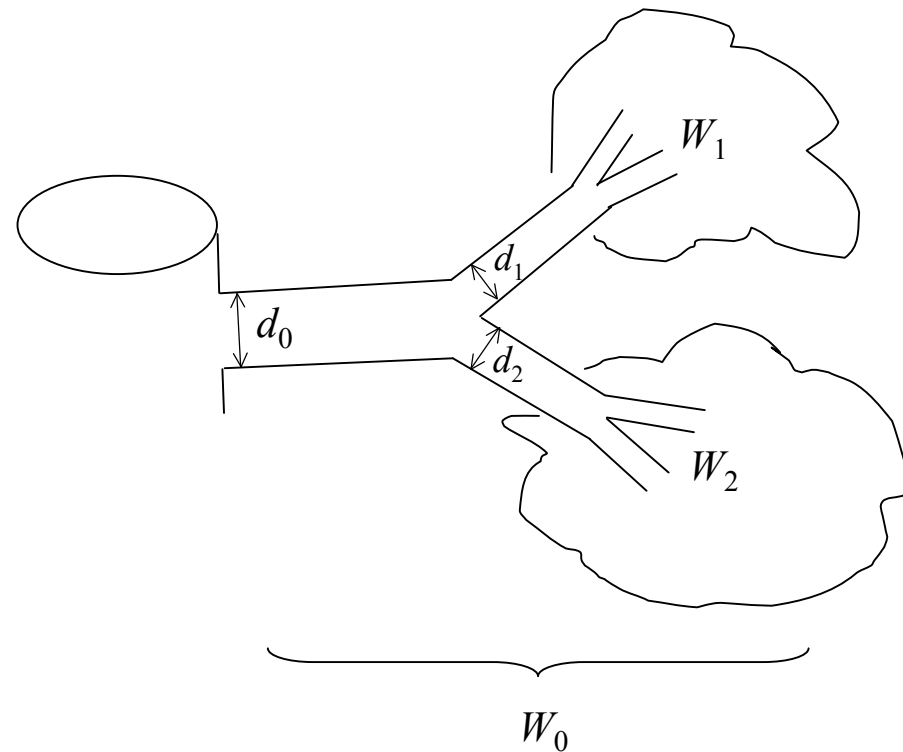
枝の重量と直径の関係

$$W \propto M \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



2. 5乗則の導出

枝を片もちはりでモデル化

式の導出にどんな仮定が設定されているか

- 枝の強度を曲げ応力で評価
- 枝は幹に対して垂直(→別の角度ならどうなる?)
- 枝は円柱形(断面形状はどこも同じ)
- 枝は相似形(葉の付き方はどの木もほぼ同じ)
- 木材は均質で材質、密度は木の種類によらず同じ

動物の代謝率：0.75乗則

生物の質量 M_b と安静時の単位時間当たりの代謝エネルギー P との間には、両対数軸上できれいな線形関係が成立している。

配付資料参照

From *Scaling*,
K.S.Nielsen

基礎代謝率と生物の質量の関係

$$P \propto M_b^{0.75} \quad 0.75\text{乗則}$$

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

熱放散の考え方では指数はいくつになるか

まず、生物の形を球体(半径 r)と仮定して指数を求める.

考え方:

生物の質量 M_b は r^3 に比例

身体から出る熱量は表面積 S に比例. (S は r^2 に比例)

単位時間当たりの熱量が基礎代謝率 P に比例.

P と M_b の関係から指数は...

生物の形を円柱と仮定したら0.75になるのでは?

結論: 体表面積が最小となる条件下でも0.75乗則は説明できない.

どうやって0.75乗を説明するのか？

なるべく多くの動物に共通する現象で説明したい.

→ それが可能ならば, より説得力が出る.

→ 学説として価値があると評価される.

「弾性相似則モデル」は何に注目したのか？

指数0.75の導出

McMahon（1973年）の学説

基本的な考えかた：

地上（重力下）で動物が体躯の形状を維持するには
筋肉を活動させる必要があり、これが基礎代謝率に
関係していると考える。（胴体が大きければ、筋肉
の断面積も増えるが質量も増加する。胴体を弾性体
と仮定すると、動物の胴体の長さ L と質量 M の間には、
折れ曲がりにくさに関して相似的な関係があると予
想される。）

弾性相似則を適用

身体の折れ曲がりにくさを数式で表現

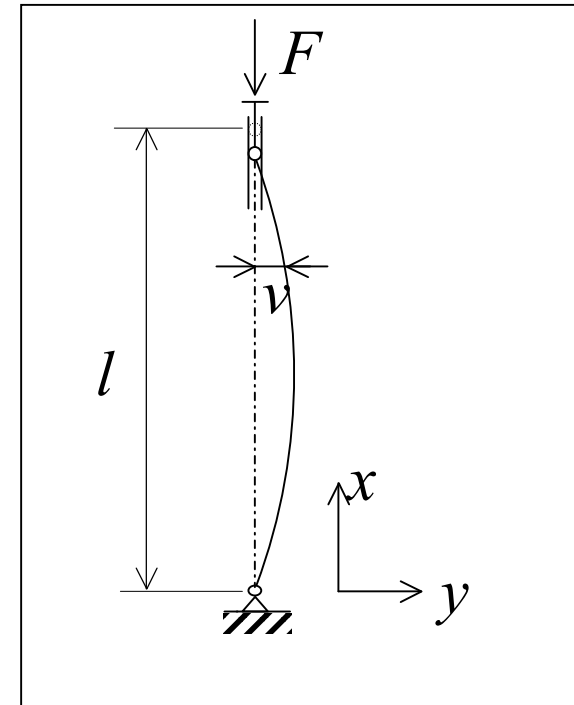


弾性はりの座屈条件を利用

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

E : ヤング率

I : 断面二次モーメント



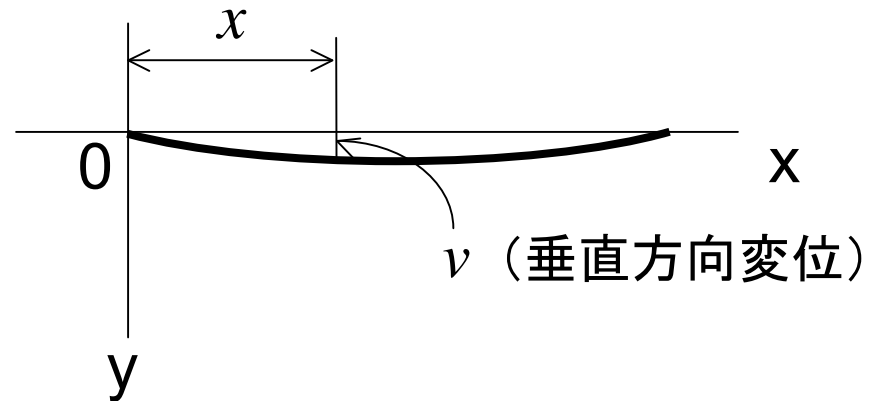
座屈条件の導出

はりのたわみの方程式

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

EI : 曲げ剛性

曲げモーメントの正方向



なぜ $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ となるのか？

軸線から y 離れた箇所でのひずみは $\frac{y}{r} = \varepsilon$

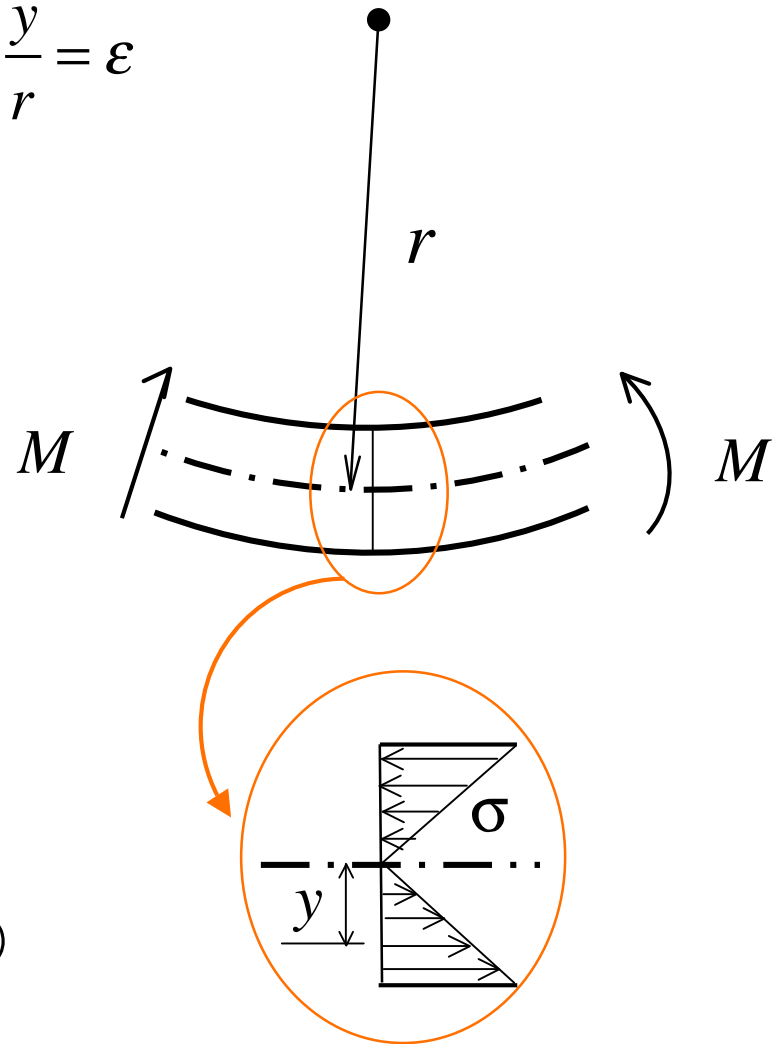
応力は $\sigma = E\varepsilon = \frac{y}{r} E$

したがってモーメント M は

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{r} \int_A y^2 dA = \frac{EI}{r}$$

一方、曲率半径の式は

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{変形が小さい場合})$$

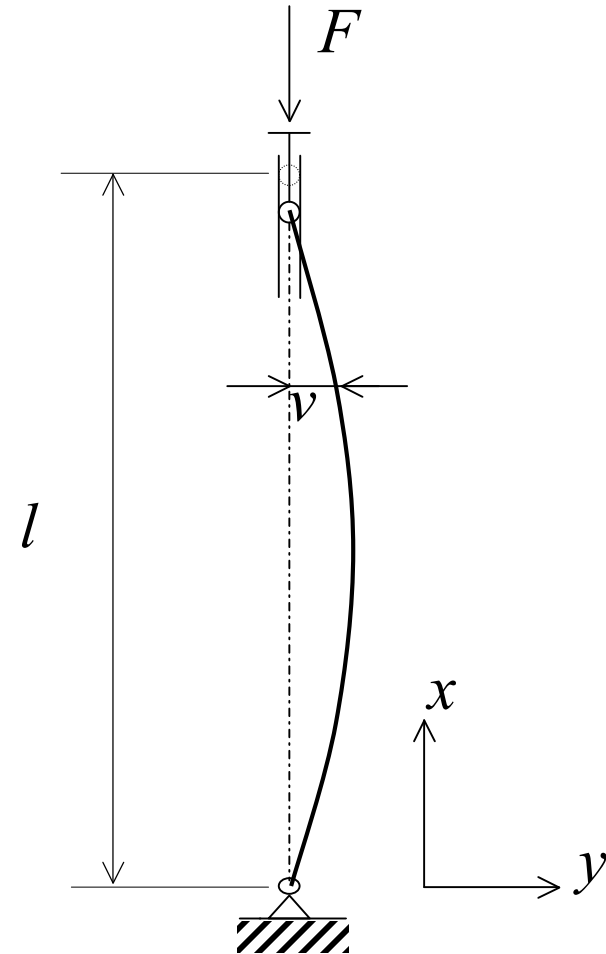


座屈条件の導出（続）

はりを縦方向にして考える

内力と外力とのつりあいの条件式を考えると、次式のようになる.

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = 0$$



座屈条件の導出（続）

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = 0$$

微分方程式の解

$$v = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

ここで $\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$

境界条件

$$x=0 \text{ で } v=0 \rightarrow C_1 = 0$$

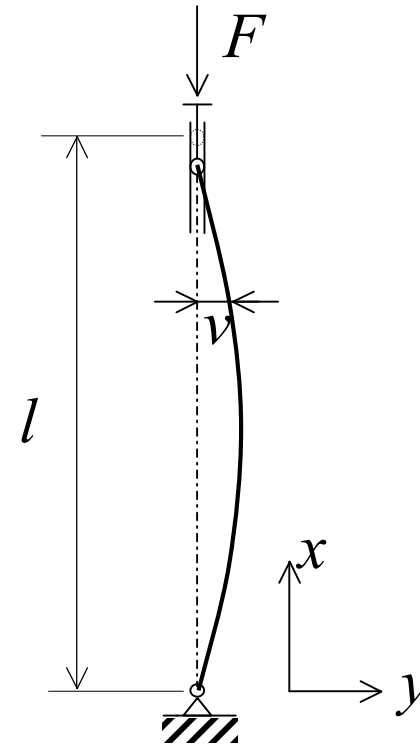
$$x=l \text{ で } v=0 \rightarrow C_2 \sin \alpha l = 0.$$

2 番目の境界条件で $C_2 = 0$ は意味がない.

→ $\alpha l = m\pi$ (m は整数) が成立する必要がある.

$$F = m^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$m=1$ のときオイラーの座屈条件という.



弾性相似則（続き）

F は胴体の重量に比例すると仮定

$$F \propto \pi d^2 l \rho g$$

ρ : 見かけ上の密度

g : 重力加速度

d : 胴体の直径

座屈しない限界長さ l_k と直径 d の関係

$$l_k^3 \propto d^2$$

胴体質量 ($l_k d^2$) は全体の質量 M_b に比例すると仮定すると

$$d \propto M_b^{\frac{3}{8}}$$

筋肉の活動

身体が座屈しないように胴体の筋肉が活動（収縮）する仕事量を見積もる.

筋肉の仕事量

$$W \propto \sigma A \Delta l$$

σ : 筋肉の単位面積
あたりの収縮力

単位時間当たり

$$P \propto \sigma A \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

A : 筋肉の断面積

Δl : 収縮長さ

Δt : 収縮時間

筋肉の収縮力, 収縮速度は一定と仮定

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

0.75 乗則を導き出すために必要な仮定

- 基礎代謝量に重力が関与している。
(身体の姿勢を維持するエネルギーに関係)
- 動物の胴体は弾性体で近似できる。
(材料が一様な円柱とみなすことができる。)
- 胴体の折れ曲がりにくさにオイラーの座屈条件を適用可能である。
- 座屈条件の荷重は生物体の質量に比例する。
- 筋肉の動作特性はどの動物も同じ。
- 生物全体の質量は胴体の質量に比例。

0.75乗則：もう一つの学説

G. B. West, J. H. Brown and B. J. Enquist,
Science, Vol. 276, pp. 122–126 (1997)

次回の講義で紹介

生体工学第一

2012. 4. 18

第2回講義内容

1. 出席点の問題:
枝の2.5乗則（出席点）
2. 基礎代謝率
3. 0.75乗則：熱放散による説明（前回の復習）
4. 0.75乗則：二つの学説
 - 4.1 弾性相似則モデル
 - 4.2 フラクタルモデル（次回に講義）

第 2 回講義おわり