生体工学第一　　　　　　2012.7.11

第13回講義内容

１．生物の増減

1.1　一種類の生物の個体数の変化

Logistic 方程式

1.2　二種類の生物の個体数の変化

Lotka-Volterra方程式

生体工学第一講義内容

生物を機械工学的観点からながめ，生物の仕組みを理解する．

生物を特徴づける要素

- 生物の基本的なデザイン：生物の大きさと代謝エネルギー
- 生物の形と機能：法則性，最適性，環境適応性
- 生物の感覚器官：仕組みと性能
- 生物の運動と移動：運動様式と移動効率
- 生体システム：群行動，個体数の増減
- 生物の形つくり：遺伝情報，パターン形成

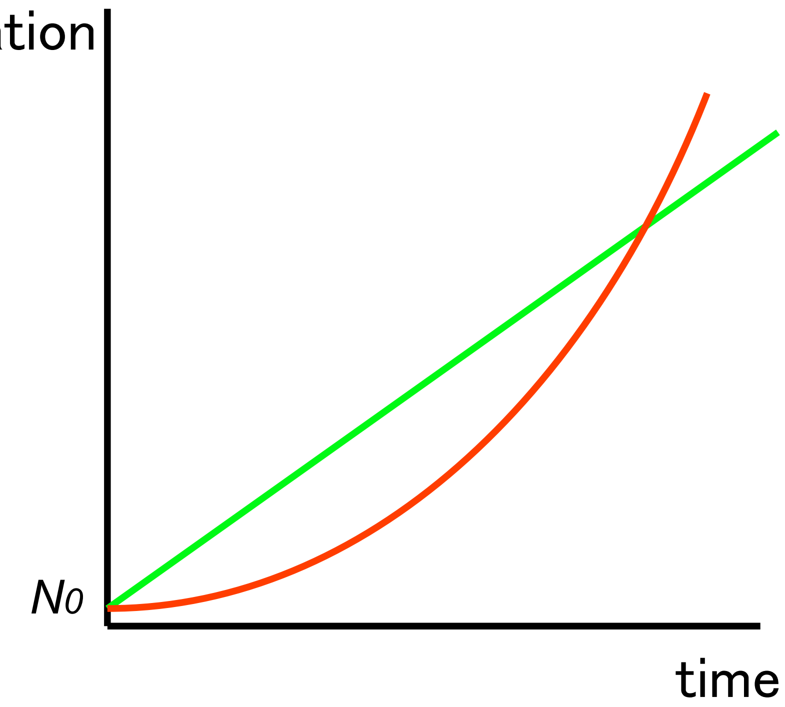
マルサスの人口論

マルサス（T.Malthus）は，「人口論（1798）」で，食料供給は線形的な増加なのに対して人口は指数的に増加し，いずれ破綻すると予測した．（幸いなことに予測ははずれている．）

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

解

$$N = N_0 e^{rt}$$



ロジスティック(Logistic)関数

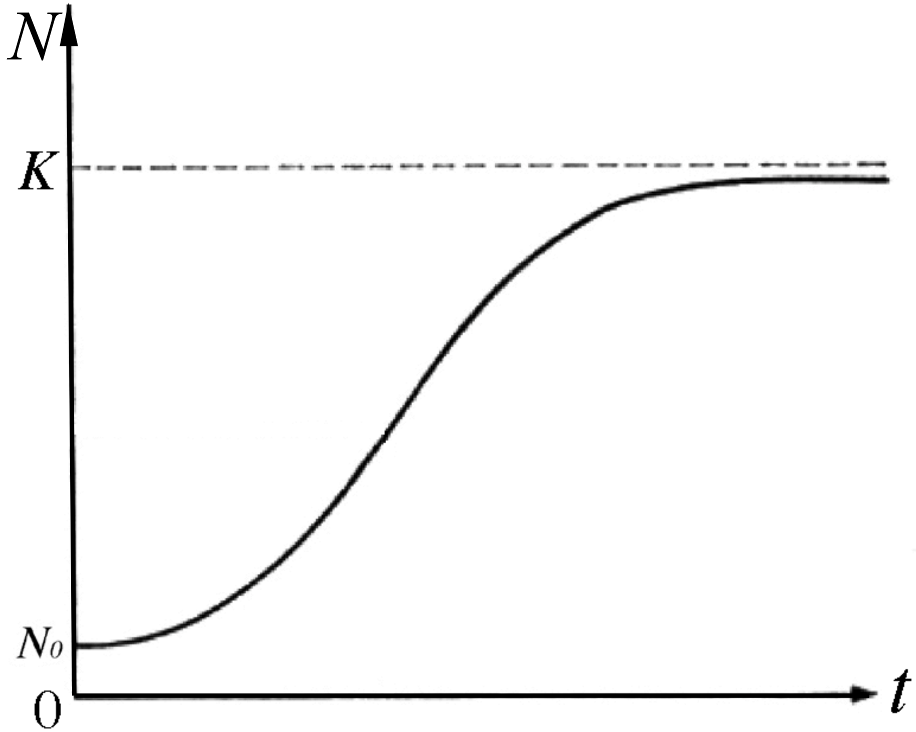
ベルハルスト(P.E. Verhulst)は，1838年に次の人口モデルを提案した.

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K}N^2$$

微分方程式の解

$$N = \frac{KN_0 e^{rt}}{N_0 e^{rt} + K - N_0}$$

N_0: 初期値



シグモイド曲線(S字曲線)とも呼ばれている.

実際の人口は．．．

ベルハルストの人口モデルによる予測は外れている．

カオスとフラクタル，山口昌哉（ブルーバックス）より

微生物の個体数変化

大腸菌や酵母菌など微生物の個体数増減は

ロジスティック関数でうまく表現できる.

カオスとフラクタル，山口昌哉（ブルーバックス）より

昆虫の個体数の増減

内田の観察（1941）

周期的な増減が観察された.

繁殖活動に時間的な離散化の影響が伺える.

カオスとフラクタル，山口昌哉（ブルーバックス）より

ロジスティック方程式の差分化

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=rN(t)-\frac{r}{K}\{N(t)\}^2=r\frac{\{K-N(t)\}}{K}N(t)$$

ここで

$N(n\Delta t)=N_n$ とおくと $\quad N_{n+1}=\left\{(1+r\Delta t)-\frac{r\Delta t}{K}N_n\right\}N_n$

さらに $\quad x_n=\frac{r\Delta t N_n}{K(1+r\Delta t)},\quad a=(1+r\Delta t)$ とおくと

$$x_{n+1}=a(1-x_n)x_n$$

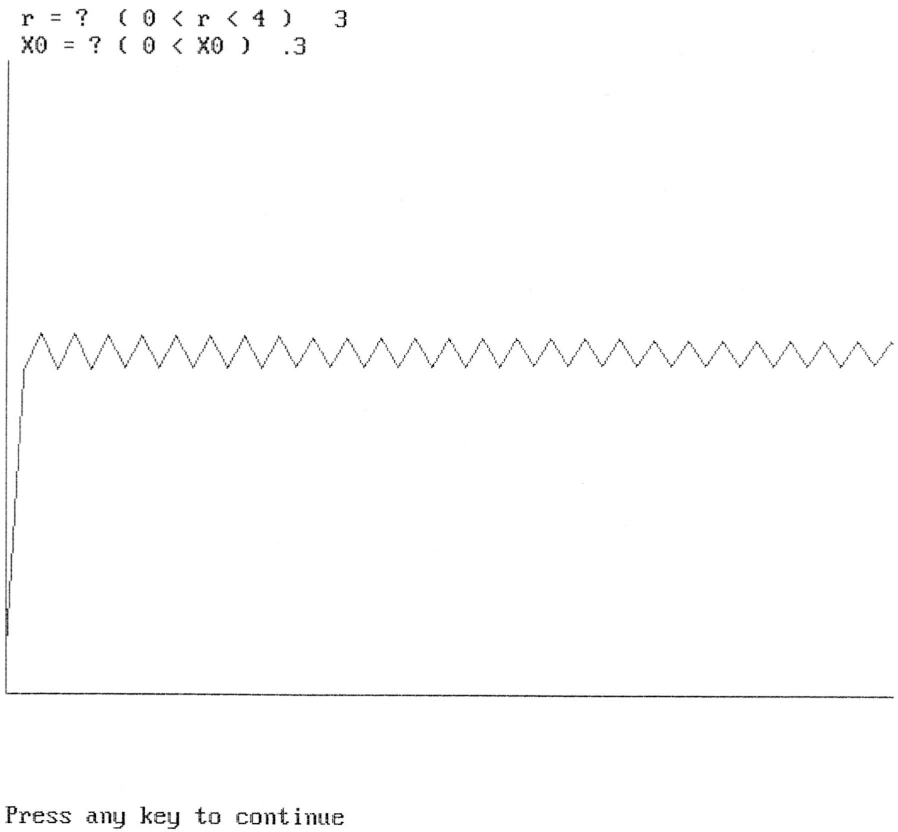
$0 \leqq a \leqq 4,\ 0 \leqq x_0 \leqq 1$

（ x_0:初期値）

（離散力学系ともいう）

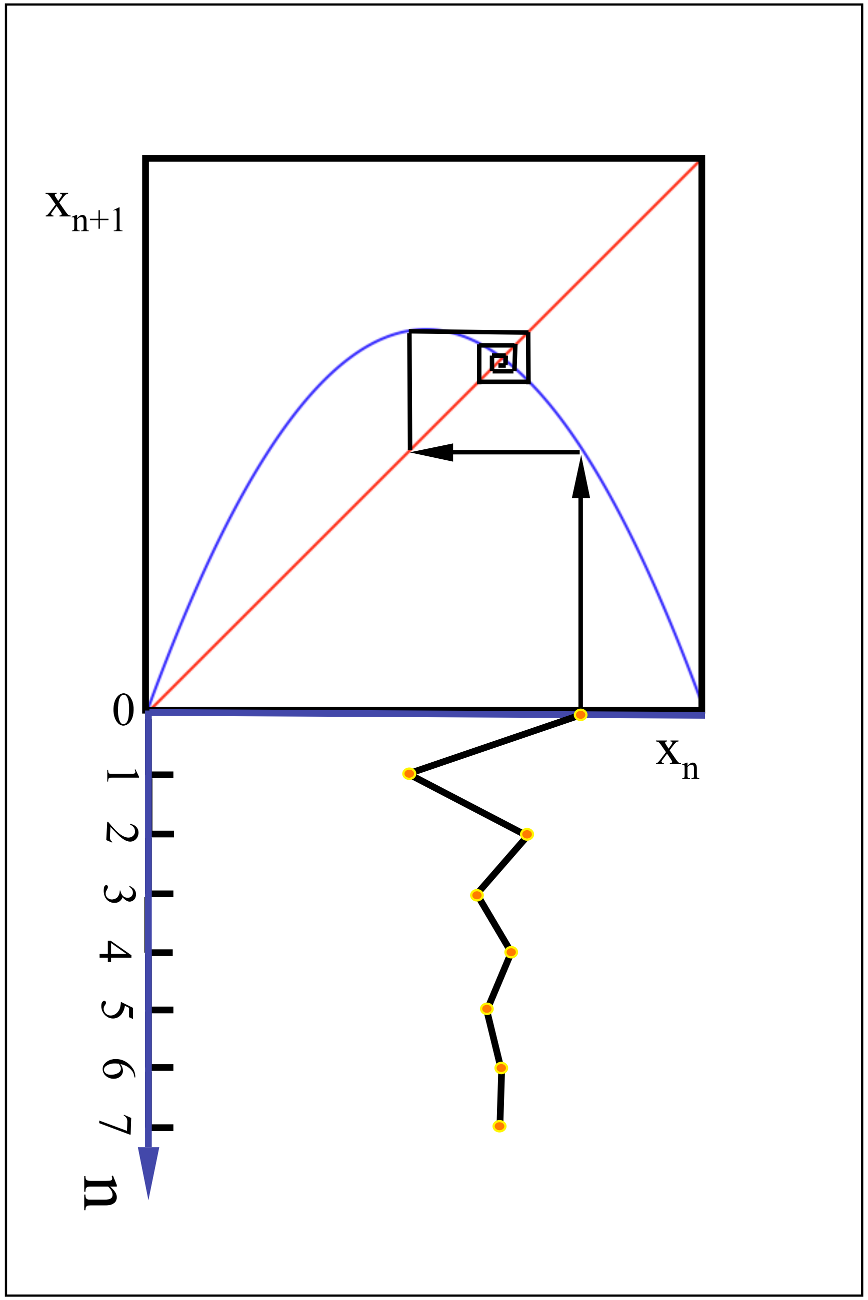
差分方程式の数値計算

$a = 3, x_0 = 0.3$のとき



Cobwebbing method

離散力学系の安定性と挙動が一目でわかる.



ウサギと山猫の統計資料

授業で配布

Lotka-Volterra 方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

1. ヤマネコがいなければ，ウサギは際限なく増える.
2. ヤマネコの数はウサギの生存数に依存する.
3. ヤマネコの数の増減は，ウサギとの遭遇に依存する.
4. ヤマネコの増加率は捉えたウサギの量に比例する.

（2'. ウサギがいないとヤマネコは一定の割合で減少する. ）

定常状態付近の安定性評価

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

定常状態を(x_0, y_0)とし，定常状態からのほんの少し離れた場所の挙動を調べる.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + u \\ y &= y_0 + v \end{aligned}\right\}$$ として上式に代入して級数展開

$$\frac{du}{dt} = f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + \cdots$$
$$\frac{dv}{dt} = g(x_0 + u, y_0 + v) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + \cdots$$

線形化

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$ ここで $$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

出席点:

1. 意味のある (x_0, y_0)を求めよ.

2. 行列 J を求めよ.

3. 固有周波数 ω を求めよ.

4. (x_0, y_0)の付近では，ウサギとヤマネコはどんな増減をするか.

数値シミュレーション

差分化

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = f(x, y)\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta t$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \qquad \Delta y = g(x, y)\Delta t \qquad \Delta y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta t$$

初期値: (x_0, y_0)

下記の差分方程式を逐次計算する.

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$$

$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_n$$

注意:ルンゲクッタ法を用いれば，数理モデルを精度よくシミュレーションできる. しかし，その結果が実際の生体挙動を忠実に表現している保証にはならない（鵜呑みにするのは危険）.

生態系管理

ウサギまたはヤマネコのどちらかの個体数が短期間に減少した（人為的な捕獲が行われた）場合，どんなことが起こるだろうか？