連続体力学　配付資料　OCW

第 13 回　2 次元弾性論の応用

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．2 次元デカルト座標系での問題

１．１　$\chi(x,y)=\frac{1}{2}a_2x^2+b_2xy+\frac{1}{2}c_2y^2$ の場合

この応力関数は前回の講義資料の(18)式を満足し，前回の講義資料の(20)式から応力 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{xy} を求めると，$\sigma_{xx}=c_2$，$\sigma_{yy}=a_2$，$\sigma_{xy}=-b_2$ と定数になるので，各々の定数を無限遠での応力の値 $c_2=\sigma_{xx}^{\infty}$，$a_2=\sigma_{yy}^{\infty}$，$b_2=-\sigma_{xy}^{\infty}$ として与えれば，

$$\chi(x,y)=\frac{1}{2}\sigma_{yy}^{\infty}x^2-\sigma_{xy}^{\infty}xy+\frac{1}{2}\sigma_{xx}^{\infty}y^2$$

となり，均一な応力場($\sigma_{xx}=\sigma_{xx}^{\infty}$，$\sigma_{yy}=\sigma_{yy}^{\infty}$，$\sigma_{xy}=-\sigma_{xy}^{\infty}$ の応力関数を表していることがわかる（図１参照）．

１．２　$\chi(x,y)=\frac{a_3}{6}x^3+\frac{b_3}{2}x^2y+\frac{c_3}{2}xy^2+\frac{d_3}{6}y^3$ の場合

この応力関数も前回の講義資料の(18)式を満足し，前回の講義資料の(20)式から応力 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{xy} を求めると，$\sigma_{xx}=c_3x+d_3y$，$\sigma_{yy}=a_3x+b_3y$，$\sigma_{xy}=-b_3x-c_3y$ となるので，$a_3=b_3=c_3=0$ の場合は，

$$\sigma_{xx}=d_3y,\quad \sigma_{yy}=0,\quad \sigma_{xy}=0$$

となり，梁の単純曲げの解を表している（図２参照）．

ここで，定数 d_3 を外部から負荷された曲げモーメント M を使って表すために（図３参照），任意断面のモーメントが曲げモーメント M と釣り合っていることを使うと，

$$M=\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}B\sigma_{xx}ydy=\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}B(d_3y)ydy=d_3\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}By^2dy=d_3I$$

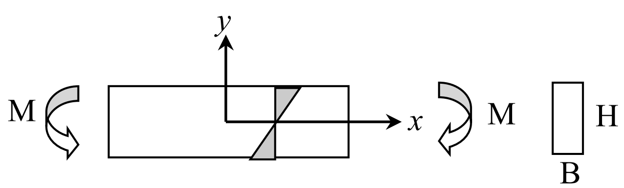

図３　外部の曲げモーメントとの釣り合い

$$\therefore d_3=\frac{M}{I}\qquad\left(I=\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}By^2dy=\frac{BH^3}{12}\right)$$

となって，定数 d_3 を M で表すことができる．なお，上式中の I は断面 2 次モーメントである．この d_3 を元の式に代入すれば，

$$\chi(x,y)=\frac{M}{6I}y^3$$

となり，これが単純曲げの応力関数を表していることがわかる．

２．2 次元極座標での問題

２．１ 2 次元極座標での基礎式

(省略)

２．２ 中心対称問題

θ を含まない r のみの関数で応力関数 χ (r)が与えられていると，⑦の式より，

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\chi(r)=0$$

となる．あるいは，微分演算子を開いて，

$$\left(\frac{d^4}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\right)\chi(r)=0$$

となる．$r=e^p$ なる変数変換を行えば，

$$\frac{d^4\chi}{dp^4}-4\frac{d^3\chi}{dp^3}+4\frac{d^2\chi}{dp^2}=0$$

となり，これは同次定係数線型微分方程式なので，特性方程式の根を求めると，０（２重根）と２（２重根）が得られる．したがって，一般解は，

$$\chi=Ae^{2p}+Bpe^{2p}+Cp+D$$

変数を r に戻して，

$$\chi(r)=Ar^2+Br^2\log r+C\log r+D$$

となる．これが，中心対称問題のエアリーの応力関数の一般形である．この応力関数から応力成分を計算すると，

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=\dfrac{1}{r}\dfrac{d\chi}{dr}=2A+B(2\log r+1)+\dfrac{C}{r^2}\\ \sigma_{\theta\theta}=\dfrac{d^2\chi}{dr^2}=2A+B(2\log r+3)-\dfrac{C}{r^2}\\ \sigma_{r\theta}=0\end{cases}$$

となる．後は，境界条件を満足するように，定数 A,B,C を決めればよい．

２．３ 先端に集中力が作用するくさびの問題

　ここでは，$\chi(r,\theta) = Ar\theta sin\theta$ を考える．この応力関数は，θに関して偶関数（θと sin θの積だから）となるので，図 5 に示すようなθ=0 なる軸（図中では，x 軸）に対称な問題に適する応力関数になる．応力成分を求めてみると，

$$\sigma_{rr} = 2A\frac{\cos\theta}{r},\quad \sigma_{\theta\theta} = 0,\quad \sigma_{r\theta} = 0$$

となる.右図の境界条件は,以下のようになっているので，

① 　$\theta = \alpha$ で $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$

② 　$\theta = -\alpha$ で $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$

これらの境界条件を応力の成分に代入しても満足することがわかる．

　くさびの先端近傍の半径 r 角度 dθの微小体積素片（図 6 参照）の力の釣り合いを考えると，この微小体積素片は，内部応力 σ_{rr} によって左側に押され，集中力 P_x で右側に押されて，その両者が釣り合っているので，x 方向，y 方向の力の釣り合いを考えると，

$$\begin{cases} -\int_{-\alpha}^{\alpha}\sigma_{rr} sin\theta r d\theta = -2A\int_{-\alpha}^{\alpha} sin\theta\cos\theta = 0 \\ -\int_{-\alpha}^{\alpha}\sigma_{rr}\cos\theta r d\theta = -2A\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos^2\theta = P_x \end{cases}$$

となる．第１式は恒等的に成り立ち，第２式から，定数 A が

$$A = -\frac{P_x}{2\alpha + sin2\alpha}$$

となるので，集中力 P_x が作用するくさび内の応力分布は，

$$\sigma_{rr} = -\frac{P_x}{2\alpha + sin2\alpha}\cdot\frac{\cos\theta}{r},\quad \sigma_{\theta\theta} = 0,\quad \sigma_{r\theta} = 0$$

となる．