

第 12 回 2 次元弾性論の基礎

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. はじめに

応力，ひずみ，構成方程式と概念的な準備を進めてきたが，今回と次回の講義で，エアリーの応力関数を説明することにより，これらの概念が一つに統合され，弾性応力場を求めると言うことが，どのような操作で行われるかを理解できるであろう。

2. 平面ひずみと平面応力

実際の 3 次元問題の中には，2 次元問題として近似できるものがあり，そのようにすると，取り扱いがかなり簡単になる。この近似の形式として，平面ひずみ問題と平面応力問題の 2 種類がある。

2. 1 平面ひずみ問題

図 1 に示すように， xy 方向に広がる非常に厚い板に， xy 面内の力だけが作用している場合， z 方向の変形が拘束されるので（実際には， z 方向の変位 w が 0 と見なせるので）， ε_{11} ， ε_{22} ， ε_{12} の値は 0 にはならないが， $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = 0$ と見なせる（なぜならば， ε_{33} ， ε_{31} ， ε_{23} は，全て，変位 w の変位勾配から計算されるため）という近似のこと。

（以下省略）

2. 2 平面応力問題

図 2 に示すように， xy 方向に広がる非常に薄い板に， xy 面内の力だけが作用している場合， z 方向は自由に変形できるので（具体的には， z 方向の面力が 0 となるまで変形するので）， σ_{11} ， σ_{22} ， σ_{12} の値は 0 にはならないが， $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$ と見なせる（なぜならば， z 方向の面力ベクトル σ_z は，応力テンソルの講義で示したように， $\sigma_z = i\sigma_{31} + j\sigma_{32} + k\sigma_{33}$ と表されるので， σ_{33} ， σ_{31} ， σ_{23} が，全て 0 でないと，表面を z 方向に変位させる力が残ってしまうので）という近似のこと。

（以下省略）

3. エアリーの応力関数

ここでは，まず，平面ひずみ問題として，以下の議論を進める。この場合の構成方程式は，構成方程式の講義資料の(34)式より，

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda e' + 2\mu e_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda e' + 2\mu e_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2\mu e_{xy} \end{cases} \quad (1)$$

となる。ここで、2次元問題における体積ひずみを $e' = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ とした。また、平衡条件式と適合条件式は、

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 f_x, f_y は体積力の x 方向、 y 方向成分である。これらの方程式を全て満足し、かつ、境界条件も満足するようにして、応力とひずみの成分を x, y の関数として決定しなければならない。

そこで、Airy の応力関数 $\chi(x, y)$ を次のように導入する。まず、物体力 f_x, f_y が、あるポテンシャル関数 $\Omega(x, y)$ を用いて、次のように表されているとすれば、

$$\begin{cases} f_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

すると、平衡条件式は次のように表される。

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{xx} - \Omega)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} - \Omega)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{cases} \sigma_{xx} - \Omega = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} - \Omega = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (5)$$

と置いて、この $\chi(x, y)$ を Airy の応力関数と言う。

(途中省略)

平面ひずみ問題におけるエアリーの応力関数 $\chi(x, y)$ が満たすべき偏微分方程式は、次

のようになる.

$$\therefore (\nabla')^2 (\nabla')^2 \chi = \frac{-2\mu}{\lambda + 2\mu} (\nabla')^2 \Omega = \frac{-1+2\nu}{1-\nu} (\nabla')^2 \Omega \quad (14)$$

これに対応して, 平面応力におけるエアリーの応力関数 $\chi(x,y)$ が満たすべき偏微分方程式は,

$$(\nabla')^2 (\nabla')^2 \chi = \frac{-(\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} (\nabla')^2 \Omega \quad (16)$$

$$(\nabla')^2 (\nabla')^2 \chi = -(1-\nu) (\nabla')^2 \Omega \quad (17)$$

となる.

さらに, 体積力 f_x と f_y がなければ, $(\nabla')^2 \Omega = 0$ なので, 平面ひずみ問題の(14)式の場合も, 平面応力問題の(16)式あるいは(17)式も, 次式で示した同じ偏微分方程式になる.

$$(\nabla')^2 (\nabla')^2 \chi = 0 \quad (18)$$

$$\therefore \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = 0 \quad (19)$$

この式より, 体積力がなければ, 応力関数 χ は重調和関数であることがわかる. また, 体積力がなければ, ラメの定数の影響はなくなり, 2次元問題における応力分布は材料定数に依存せず, 平面ひずみと平面応力の区別もなくなることがわかる. この場合は, 各応力成分は,

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (20)$$

で求められる. このようにして求めた応力はもちろんのこと, それらを(7), (8)式に代入して得られるひずみの成分も, 自動的に平衡条件式や適合条件式を満足する.