第 13 回　ひずみテンソル(2)

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．任意の方向のひずみベクトルの計算

物体内の任意の点 P から，任意の方向 $\boldsymbol{n}$ を向く線素 PQ を考える．その方向余弦を $(\upsilon_{\mathbf{n}X}, \upsilon_{\mathbf{n}Y}, \upsilon_{\mathbf{n}Z})$ とし，線素の長さを dr とする．図１に示すように，物体の微小変形(すなわち, $E_{ij} = e_{ij} = \varepsilon_{ij}$).に伴って変形変位 d$\boldsymbol{u}$ によって，線素 PQ'になった場合を考える．この時の d$\boldsymbol{u}$ は次式で表される．

$$d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}du + \boldsymbol{j}dv + \boldsymbol{k}dw \qquad (1)$$

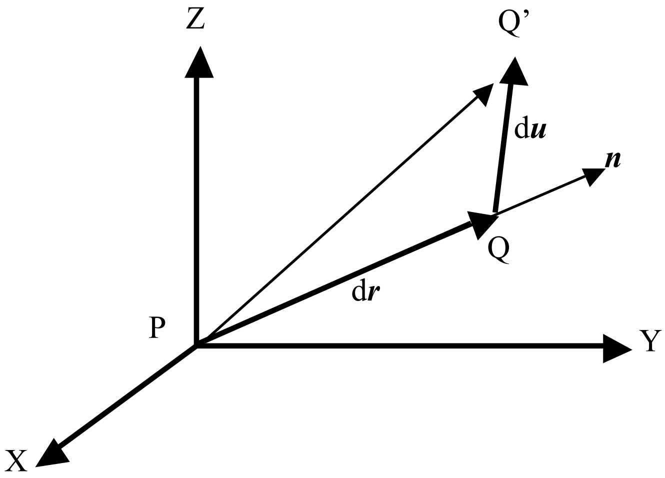

図 1　ひずみベクトル

ここで，　du, dv, dw は変位ベクトルの成分で，剛体的並進変位や剛体的回転変位を除いた純粋な変形変位である. すなわち, 前回の (17) 式の内の右辺第 1 項のみを用いて，次のように書き表される．

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon_{XX}dX + \varepsilon_{XY}dY + \varepsilon_{XZ}dZ \\ dv &= \varepsilon_{YX}dX + \varepsilon_{YY}dY + \varepsilon_{YZ}dZ \qquad (2) \\ dw &= \varepsilon_{ZX}dX + \varepsilon_{ZY}dY + \varepsilon_{ZZ}dZ \end{aligned}$$

ここで，線素 dr の単位長さ当たりの d$\boldsymbol{u}$ を，次式のように，方向 $\boldsymbol{n}$ を向く線素のひずみベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{n}}$ と定義する．

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n} &= \frac{d\boldsymbol{u}}{dr} \\ &= \boldsymbol{i}\frac{du}{dr} + \boldsymbol{j}\frac{dv}{dr} + \boldsymbol{k}\frac{dw}{dr} \\ &= \boldsymbol{i}(\varepsilon_{XX}dX + \varepsilon_{XY}dY + \varepsilon_{ZX}dZ)\frac{1}{dr} \\ &\quad + \boldsymbol{j}(\varepsilon_{XY}dX + \varepsilon_{YY}dY + \varepsilon_{YZ}dZ)\frac{1}{dr} \\ &\quad + \boldsymbol{k}(\varepsilon_{ZX}dX + \varepsilon_{YZ}dY + \varepsilon_{ZZ}dZ)\frac{1}{dr} \qquad (3) \end{aligned}$$

dX/dr は方向余弦ν_{nX}になるので，

$$\therefore \boldsymbol{\varepsilon}^n = \boldsymbol{i}(\upsilon_{nX}\varepsilon_{XX} + \upsilon_{nY}\varepsilon_{XY} + \upsilon_{nZ}\varepsilon_{ZX}) + \boldsymbol{j}(\upsilon_{nX}\varepsilon_{XY} + \upsilon_{nY}\varepsilon_{YY} + \upsilon_{nZ}\varepsilon_{YZ}) + \boldsymbol{k}(\upsilon_{nX}\varepsilon_{ZX} + \upsilon_{nY}\varepsilon_{YZ} + \upsilon_{nZ}\varepsilon_{ZZ}) \quad (4)$$

これより，上式は応力ベクトルσ^n に関する式と類似の式であることがわかる．すなわち，応力ベクトルと同様に，物体内の任意の位置 P における任意の方向 $\boldsymbol{n}$ の線素に関するひずみベクトルε^n は，９つの成分を有するひずみテンソル ε_{ij} (i,j = X, Y, Z)を用いて一意に表せることになる．

２．主ひずみ

（以下省略）

４．　ひずみの適合条件

前回の講義で示したように，微小変形理論では，ひずみテンソルの成分は変位勾配の対称成分として（21）式のように表すことができた．また，この場合，2 次以上の高次の微少量を無視するので，　Lagrange strain E_{ij} と Euler Strain e_{ij} とを区別する必要もなくなることも，既に，述べた．

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (21)$$

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w$$

$$x_1 = X, \quad x_2 = Y, \quad x_3 = Z$$

そうすると，　u, v, w という 3 つの変位成分から６つのひずみテンソルの成分（ε_{XX}, ε_{YY}, ε_{ZZ}, ε_{YZ}, ε_{ZX}, ε_{XY})を求めることになるので，ひずみテンソルの成分を全て独立に与えられないことがわかる．そこで，ひずみテンソルの成分間にはある関係式が成り立っていなければならず，それをここで導出してみる．

まず，　(21) 式を x_k と x_l で 2 階偏微分する．

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\right) \qquad (22)$$

同様にして，$\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j}$　$\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k}$　$\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l}$ を求めると，

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_l \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} \right) \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_j}{\partial x_l \partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \right) \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \right) \tag{25}$$

となる．(22) 式と(23) 式の和から，(24) 式と (25)式の和を引くと，右辺は相殺されて 0 になることが分かる．すなわち，ひずみに関する適合条件が得られる．

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \tag{26}$$

これが，適合条件の 1 つの式であるので，*i, j, k, l,*に各々X, Y, Z を代入すると，合計 81 個の式が得られるが，その中の恒等式や繰り返しを除くと，(26)式に類似する次式が得られる．

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) \tag{29}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \tag{30}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \tag{31}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \tag{32}$$

この 6 個の式が成り立てば，ひずみテンソルの成分から 1 価の連続関数として変位を一意に決定できる．このことは，変形によって，物体内に食い違いや重なりが生じず，連続体を保つための必要十分条件となっている．