連続体力学　配付資料　OCW

第 11 回　弾性体の構成方程式

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．　構成方程式はなぜ必要なのか？

これまで，応力テンソル，ひずみテンソルの話をしてきたが，弾性体の応力状態・変形状態を規定する未知数の数を数えてみると，

未知の変数	応力テンソル	6 個
	ひずみテンソル	6 個
	変位	3 個
	合計	15 個

となる．一方，応力の平衡方程式やひずみの適合方程式など，未知の変数を規定する方程式の数は，

方程式の数	応力の平衡方程式	3 個	$\sigma_{ij,j} = 0$
	ひずみの適合方程式	6 個	$\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = 0$
	構成方程式	6 個	$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
	合計	15 個	

となり，構成方程式がないと，弾性体の変形問題を解くことができないことがわかる．なお，ここで言う構成方程式とは，応力とひずみの関係を表すものである．構成方程式以外は，示強変数（応力）あるいは示量変数（ひずみ）に関する場の量に関わる方程式であるが，構成方程式でこれらの量の関係が規定され，弾性体を構成する物質の物性が反映されることになる．

2.　弾性体の熱力学

弾性体の単位体積の領域に dQ の熱的仕事が供給され，応力σ_{ij}によって $d\varepsilon_{ij}$なる微小ひずみが与えられた時，この領域の内部エネルギーの変化 dU は，

$$dU = dQ + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

で与えられる．次に，この可逆過程における温度を T とすると，エントロピーは次式で定義できる．

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad (2)$$

これを(1)式に代入すると，

$$dU = TdS + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \qquad (3)$$

となり，内部エネルギーの引数がエントロピーS とひずみε_{ij}となっていることがわかる．エントロピーを制御するのは難しいので，ルジャンドル変換によって，次のヘルムホルツ自由エネルギーF を新たに定義する．

$$F = U - TS \qquad (4)$$

すると，ヘルムホルツ自由エネルギーの微小変化 dF は，

$$dF = -SdT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \qquad (5)$$

となる．この 2 つの熱力学関数を用いて，断熱過程と等温過程を表すと，

①断熱過程

ｄQ=0 なので，dS=0 となり，内部エネルギーを用いると．

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \qquad (6)$$

②等温過程

dT=0 なので，　ヘルムホルツ自由エネルギーを用いると，

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \qquad (7)$$

となる．

３．ひずみエネルギー関数

次式の関係が成り立つような，あるスカラー関数 W が存在する時，このスカラー関数 W をひずみエネルギー関数という．

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (8)$$

前節の結果から，断熱過程に対するひずみエネルギー関数 W は内部エネルギーU，等温過程に対するひずみエネルギー関数はヘルムホルツ自由エネルギーF であることがわかる．なお，どちらの熱力学関数を使った場合でも，

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}}\right) \qquad (9)$$

となっているので．

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (10)$$

と言う関係がある．

４．弾性体の構成方程式の導出

均一等方弾性体の等温過程を考える．通常，基準温度 T_0 からの温度差 ΔT で表現することが多いが，ここでは，簡単のため，基準温度における等温変化とし，$\Delta T=0$ として導出を進める．等温過程なのでヘルムホルツ自由エネルギーF を用いると，

$$F\left(T,\varepsilon_{ij}\right)=K(T_0)+b_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\cdots \qquad (11)$$

となる．$K(T_0)$は温度にのみ依存する定数項である．$\varepsilon_{ij}=0$ の時に，$\sigma_{ij}=0$ となる温度を基準温度にすれば，$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$ なので，$b_{ij}=0$ とならなければならないことがわかる．

また，変形が微小であれば，3 次以上の微小量は無視できるので，

$$F\left(T,\varepsilon_{ij}\right)=K(T_0)+\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \qquad (12)$$

このヘルムホルツ自由エネルギーは，等温過程でのひずみエネルギー関数 W なので，

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}&=\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\\&=2\times\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\\&=C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (13)\end{aligned}$$

これが，弾性体の構成方程式である．上式の C_{ijkl} が弾性スティフネステンソルで．4 階テンソルである．等温変化であれば，温度に依存する定数を無視して，

$$F=\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \qquad (14)$$

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (15)$$

$$C_{ijkl}=\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}}\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{ij}}=\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)=C_{klij} \qquad (16)$$

(14)式より，ひずみエネルギー関数 W は，ひずみに関する正値 2 次形式となっていることがわかる．(15)式が，通常，使われる弾性体の構成方程式である．また，(16)式から C_{ijkl} の添字の内，前の２つと後ろの 2 つを交換したものと同じ値を持つことがわかる．さらに，応力とひずみが対称テンソルであることから，

$$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk} \qquad (17)$$

となることもわかる．

（以下省略）