

第 11 回 応力テンソル (2)

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. 主応力

単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を持つ任意の面 ds における応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ は、応力テンソル σ_{ij} で表すことができる。一般的には、応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ は単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ に平行ではないが、ある特定の面では、応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ は単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ に平行となり、剪断成分がゼロになることある。この面のことを主応力面と言い、その応力ベクトルの大きさを主応力と言う。

主応力面の単位法線ベクトルを $\mathbf{m}$ で表し、それに対応する主応力の大きさを σ で表すと、主応力面での応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^m$ は、次式で表される。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^m &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{i}v_{mx} + \mathbf{j}v_{my} + \mathbf{k}v_{mz})\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 v_{mx} , v_{my} , v_{mz} は主応力面の単位法線ベクトルの方向余弦である。一方、主応力面の応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^m$ は次のように表されることは、前回の(9)式で述べた。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^m &= \mathbf{i}(v_{mx}\sigma_{xx} + v_{my}\sigma_{yx} + v_{mz}\sigma_{zx}) \\ &\quad + \mathbf{j}(v_{mx}\sigma_{xy} + v_{my}\sigma_{yy} + v_{mz}\sigma_{zy}) \\ &\quad + \mathbf{k}(v_{mx}\sigma_{xz} + v_{my}\sigma_{yz} + v_{mz}\sigma_{zz})\end{aligned}\quad (2)$$

(1) 式 と (2) 式を等値すると、

$$\begin{aligned}&\mathbf{i}(v_{mx}\sigma_{xx} - v_{mx}\sigma + v_{my}\sigma_{yx} + v_{mz}\sigma_{zx}) \\ &+ \mathbf{j}(v_{mx}\sigma_{xy} + v_{my}\sigma_{yy} - v_{my}\sigma + v_{mz}\sigma_{zy}) \\ &+ \mathbf{k}(v_{mx}\sigma_{xz} + v_{my}\sigma_{yz} + v_{mz}\sigma_{zz} - v_{mz}\sigma) = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (3)$$

ここで、ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は一次独立なベクトルであるから、(3) 式を満足する v_{mi} ($i = x, y, z$) に関する連立一次方程式を得る。

$$\begin{aligned}v_{mx}(\sigma_{xx} - \sigma) + v_{my}\sigma_{yx} + v_{mz}\sigma_{zx} &= 0 \\ v_{mx}\sigma_{xy} + v_{my}(\sigma_{yy} - \sigma) + v_{mz}\sigma_{zy} &= 0 \\ v_{mx}\sigma_{xz} + v_{my}\sigma_{yz} + v_{mz}(\sigma_{zz} - \sigma) &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

この連立 1 次方程式が自明でない解を持つためには、

$$\begin{vmatrix}\sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma\end{vmatrix} = 0\quad (5)$$

(5) 式を展開して、

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (6)$$

ここで、 J_1, J_2, J_3 は、次式で定義されている。

$$J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (7)$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{xx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (9)$$

ここで、(6)式は、3次方程式なので、一般的に3つの根を持つ。これら3つの解が、主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の大きさを表している。

(以下省略)

2. 平衡方程式

図1には、 x, y, z 軸に垂直な面を持つ微小体積要素を示す。 x 軸に関するニュートンの並進運動に関する運動方程式を書くと、

$$\begin{aligned} \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_{xx} dy dz \\ & + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx - \sigma_{yx} dz dx \\ & + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{zx} dx dy \\ & + f_x dx dy dz \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 ρ は密度、 u は x 軸方向の変位、 f_x は体積力である。 y 軸や z 軸方向にも同様な式が成り立ち、それぞれの式で同じ値で符号が違ふものを相殺すると、最終的に、次の3つの方程式が得られる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x \quad (15)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y \quad (16)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z \quad (17)$$

ここで、 v と w は y 軸と z 軸方向の変位である。もし、この体積要素が内部応力によって静的釣り合い状態にあるならば、これらの方程式の左辺は0になるはずである。このようにして、応力テンソルの平衡方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (20)$$

さらに、体積力 f がなければ、

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

次に、 z 軸に関するニュートンの回転運動に関する運動方程式を検討する。同様に、いくつかの項を相殺すると、 x 軸と y 軸に関する同様な方程式が得られる。

$$I_1 \frac{\partial^2 \omega_{yz}}{\partial t^2} = (\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) dx dy dz \quad (25)$$

$$I_2 \frac{\partial^2 \omega_{zx}}{\partial t^2} = (\sigma_{zx} - \sigma_{xz}) dx dy dz \quad (26)$$

$$I_3 \frac{\partial^2 \omega_{xy}}{\partial t^2} = (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dx dy dz \quad (27)$$

しかしながら、慣性モーメント I_i ($i=1,2,3$) の大きさは ρdx^5 程度であるので、これらの方程式の左辺は高位の無限小として無視しても良い。すなわち、

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (28)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad (29)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (30)$$

この導出から、応力テンソルは対称テンソルであることがわかる。また、それ故に、3つの主応力は実数となって、主応力面は互いに直交することがわかる。