

第 7 回 材料力学におけるひずみ・フックの法則

無機材料工学科

准教授 安田公一

1. はじめに

今回は、ひずみに関する材料力学的な定義を解説する。また、等方線型弾性体における応力とひずみの関係を示すフックの法則についても説明する。

2. ひずみの定義

図 1 に示すように、長さ ℓ_0 、断面積 S の棒に、軸荷重 F が負荷した場合を考える。この場合の円柱軸に垂直な断面に作用する垂直応力 σ は、次式で求められる。

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1)$$

この時、棒の長さが ℓ となったとすると、この棒には、

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad (2)$$

で表される垂直ひずみ ε が生じている。棒が伸びた場合は、ひずみ ε は正の値を、縮んだ場合は負の値を持つ。このように荷重軸方向のひずみを縦ひずみと呼ぶ。

さらに、棒が引張られた場合、引張り軸に垂直な方向には、図 2 に示すように、引張り軸方向には伸びるが、それと垂直方向には縮むことがわかる。棒の直径を d_0 とし、荷重を負荷したときの直径を d とすると、この棒の横方向の垂直ひずみは、

$$\varepsilon' = \frac{d - d_0}{d_0} \quad (3)$$

で表される。このとき、縦ひずみ ε に対する横ひずみ ε' の比に負号をつけたものをポアソン比 ν と呼ぶ。

$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (4)$$

次に、立方体に剪断力 F が負荷された場合を考える。立方体の一つの面の面積を S とすると、剪断応力 τ は

$$\tau = \frac{F}{S} \quad (5)$$

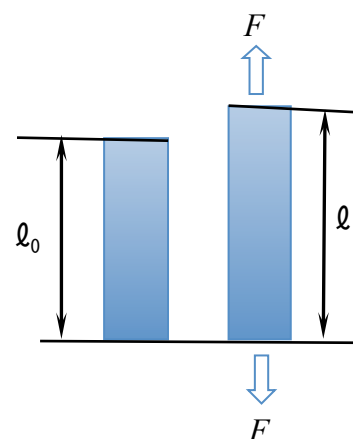


図 1 棒の伸び

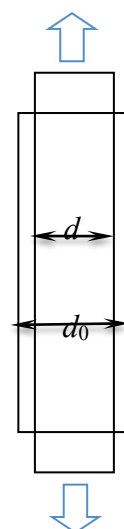


図 2 垂直方向の縮み

となる。この剪断応力によって、立方体が図3のように歪んだ場合、 z 方向に a だけ離れた2点が x 方向に δ だけずれたとすると、剪断ひずみ γ は、

$$\gamma = \frac{\delta}{a} \quad (6)$$

と表される。また、変形前は x 軸と z 軸とのなす角は 90° であるが、剪断変形により角度が ϕ になったとすると、微小変形であれば、

$$\gamma = \frac{\delta}{a} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \approx \frac{\pi}{2} - \phi \quad (7)$$

となって、剪断ひずみは、 90° からの角度のずれと考えても良い。剪断ひずみの正負は、横変位する面の外向き面法線が座標軸（図3では z 軸）の正の方向を向いている場合、横変位も座標軸（図3では x 軸）の正の方向であれば、その剪断ひずみを正とする。

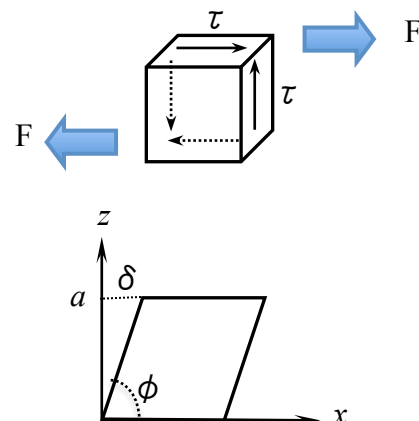


図3 剪断ひずみ

3. 変位勾配を用いたひずみの定義

ここでは、等方線型弾性体の微小変形について考える。まず、図4のように、 xyz 座標系を取り、対象とする物体内の任意の点 P に直方体状の微小体積要素を考える。それぞれの辺の長さを dx , dy , dz とする。この物体が変形して、点 P の変位が u , v , w であったとすると、 x 軸上の点 A の x 方向の変位は、

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (8)$$

となるので、この変形に伴う線分 PA の長さの変化は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (9)$$

となる。これより、点 P における x 軸方向の単位長さ当たりの長さの変化を、

$$\epsilon_x \equiv \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

垂直ひずみ ϵ_x と定義する。ここで、 $\partial u / \partial x$ のことを変位勾配と呼ぶ。同様に、 y 方向、 z 方向の垂直ひずみ ϵ_y と ϵ_z も、次式で定義される。

(以下省略)

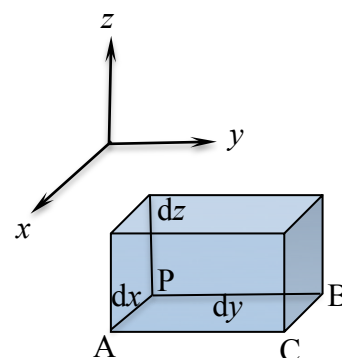


図4 微小体積要素

4. モールのひずみ円とロゼットゲージ

(16)式と(17)式より，横軸に ε ，縦軸に $\gamma/2$ を取ってモールのひずみ円を描くことができる．実際には，ロゼットゲージのデータを解析するのに使われるので，その使い方について述べる．

(以下省略)

5. フックの法則

ひずみが応力に比例するというのがフックの法則である． x 軸方向の垂直応力 σ_x が負荷された場合， x 軸方向の垂直ひずみ ε_x は，

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (16)$$

ここで， E はヤング率である．また，この σ_x により，横方向は縮み， y 方向， z 方向のひずみは，次式で与えられる．

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (17)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (18)$$

ここで， ν はポアソン比である． σ_y および σ_z が負荷された場合も同様なので，これらを重ね合わせると，

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} \quad (19)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \} \quad (20)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \} \quad (21)$$

となる．剪断応力と剪断ひずみに対しては，

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (22)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (23)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (24)$$

となる．ここで， G は剛性率である．剛性率 G とヤング率 E ，ポアソン比 ν との間には，次の関係がある．

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (25)$$

(以下省略)