

第 1 回 運動方程式・仮想仕事の原理

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. はじめに

既に、高校物理でニュートン力学は学習しているが、大学入試の際に、無機材料工学科は応用化学系に分類されていることから、物理が苦手な学生も少なくない。しかし、無機材料工学科で習う学問分野の多く（例えば、熱力学、統計力学、量子力学、物性物理学など）は、力学を基礎として構築されているといっても過言ではない。したがって、直面する問題に対し、力学的に状況を把握し、それを定式化できるようになることは、将来、有為な研究者・技術者になるための必須条件となっている。そこで、本講義では、ニュートン力学の復習から、説き起こし、最終的には、連続体力学の基本概念をイメージできるような内容構成とした。今回は、ニュートン力学の復習である。

2. 質点の運動方程式

既に、学習してきていることなので、要点のみを整理する。

（1）ニュートンの運動の法則

第 1 法則（慣性の法則） 質点は、力が作用して運動状態が変化しない限り、静止あるいは直線等速運動の状態を維持する。

第 2 法則（運動方程式） 運動量の変化は加えられた力に比例して、力の働いた直線方向に沿って起こる。

第 3 法則（作用・反作用の法則）すべての作用に対して、大きさが等しく、方向が反対向きの反作用が常に存在する。

高校物理では、運動方程式は、次のように与えられた。

$$F = ma \quad (1)$$

ここで、 F は質点に働く力、 a は質点の加速度である。一方、上記の第 2 法則を式に表すと、

(2)

となり、 p は運動量を表す。

（以下省略）

（2）仕事、ポテンシャルエネルギー

力 F が位置 r の関数であった場合、 $F(r)$ と表現するが、このような力が作用する中を質点が点 P から点 Q まで運動したとき、力が質点に対して行った仕事は、

$$W_{pq} = \int_p^Q \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} \quad (6)$$

となるが、一般的には、この仕事は、点 P から点 Q にいたる経路に依存して変わる。ただし、力の中には、経路には依存せず、点 P と点 Q の位置だけに依存する場合があって、その場合の力を保存力という。

(以下省略)

(3) エネルギー保存則

質点が点 P から点 Q まで運動した時の仕事 W_{PQ} は、次のようにして求めることもできる。

$$\begin{aligned} W_{PQ} &= \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_P^Q m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} dt \\ &= \frac{m}{2} v_Q^2 - \frac{m}{2} v_P^2 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。そこで、

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (13)$$

を質点の運動エネルギーと定義する。さらに、(7)式と(13)式を等しいとおいて、整理すると、

(14)

となり、点 P から点 Q までに運動において、(14)式の両辺が、それぞれ保存されることがわかる。そこで、

$$E = \frac{m}{2} v^2 + U(r) \quad (15)$$

と新たに定義して、これを力学的全エネルギーとよぶ。また、(14)式を力学的エネルギー保存則と呼ぶ。

<演習 1>

省略

3. 静力学と仮想仕事の原理

(1) 運動の自由度と拘束条件

3次元空間中を運動する1つの質点は、各時刻における3つの座標を決めれば（例えば、デカルト座標系では、 (x, y, z) 、球座標系では、 (r, θ, ϕ) を決めれば）、運動を決定することができる。したがって、運動の自由度は3ということになる。もし、質点の運動が (x, y) 平面上に拘束されていた場合は、運動の自由度は2となるが、 $z=0$ という拘束条件が1つ加えられることになる。すなわち、1つの質点の運動では、自由度と拘束条件の数を足すと、必ず、3になる。

(以下省略)

(2) 仮想仕事の原理

ニュートンの運動方程式によれば、1つの質点が3次元空間内で静止している場合には、その質点に働く合力が0となっている。ここで、この質点に働く拘束力を S_i 、拘束力以外の力を F_i とすると、合力0ということは、

$$\sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m S_j = 0 \quad (20)$$

と表される。ここで、拘束条件を破らないようにして、無限小の変位 δr だけ質点を動かしてみることにする。ここで、この変位は、我々が想像上与える変位なので、仮想変位と呼ばれている。このような仮想変位を行ったときに拘束力も含めてすべての力がなす仕事のことを仮想仕事 δW と呼ぶ。すなわち、

$$\delta W = \left(\sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m S_j \right) \cdot \delta r \quad (21)$$

と表されるが、(20)式が成り立っているので、

$$\delta W = 0 \quad (22)$$

となる。

(以下省略)

<例題 1>

省略