10　整数計画問題 – ナップザック問題

10.1　0-1 ナップザック問題と分枝限定法

ここでは，変数の取りうる値を 0 または 1 に限定した，0-1 ナップザック問題を取り上げ，

$$(P)\begin{cases} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ & x_j \in \{0,1\},\ j=1,2,\ldots,n \end{cases} \tag{31}$$

に分枝限定法をあてはめる際に，問題の特殊構造がどのようにうまく利用できるかをみていくことにします．

0-1 変数問題に対して分枝限定法を適用する場合，適当な順序で変数 x_j $(j=1,2,\ldots,n)$ の値を 0 または 1 に固定して子問題の列を生成していきます．ここで，k 番目の子問題を (P_k) と書き，

$$\begin{aligned} S^+ &= \{j \mid (P_k) \text{ で } x_j \text{ の値が 1 に固定されている }\} \\ S^0 &= \{j \mid (P_k) \text{ で } x_j \text{ の値が 0 に固定されている }\} \\ F &= \{j \mid (P_k) \text{ で } x_j \text{ の値がまだ固定されていない }\} \end{aligned}$$

とすると，子問題 (P_k) は

$$(P_k)\begin{cases} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j\in F} c_j x_j + \sum_{j\in S^+} c_j \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j\in F} a_j x_j \le b - \sum_{j\in S^+} a_j \\ & x_j \in \{0,1\},\ j \in F \end{cases}$$

と書くことができます．そこで，以下では記号を簡略化するために $b_k = b - \displaystyle\sum_{j\in S^+} a_j$ かつ $z_k = \displaystyle\sum_{j\in S^+} c_j$ と置きかえます．また，変数の番号を付け替えて，(P_k)

$$(P_k)\begin{cases} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + z_k \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \le b_k \\ & x_j \in \{0,1\},\ j=1,2,\ldots,m \end{cases}$$

と書くことにします．また，x_j の効率 γ_j を

$$\gamma_j = c_j/a_j,\ j=1,2,\ldots,m \tag{32}$$

で定義し，さらに

$$\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \cdots \ge \gamma_m$$

となるように変数の並べ替えが行われているものとします．このような並べ替えを行うには，一般に $m \log m$ 回程度の比較演算が必要となります．

まず，変数 x_j の効率 γ_j の大きさを手がかりに，(P_k) の良い実行可能解を手軽に生成するため，<u>貪欲解法</u>を説明します．

●実行可能解の求め方

(P_k) の目的関数値を大きくするには，単位重量あたりの有効度をあらわす効率 γ_j の大きな変数を優

先的に 1 とするのがよさそうな気がします．そこで γ_j の大きな順，すなわち j の小さな順に a_j の和が b_k を超えない範囲で，順次，変数の値を 1 とする次のようなアルゴリズムが考えられます．

貪欲解法

ステップ 1：$B := b_k$, $z := z_k$, $j := 0$ とする．

ステップ 2：$j := j + 1$ とする．$j > m$ ならば停止する．

ステップ 3：$a_j > B$ ならばステップ 2 に戻る．$a_j \leq B$ なら $x_j := 1$, $B := B - a_j$, $z := z + c_j$ としてステップ 2 に戻る．

このアルゴリズムは最適解を生成する保証はないけれど，予想通り多くの場合にきわめて良い実行可能解を生成することが確かめられています．以下では，貪欲解法によって得られる解を貪欲解とよびます．

●上界値の求め方：連続緩和問題

次に，問題 (P_k) の良い（なるべく小さい）上界値 $\bar{z}(P_k)$ を求める方法を説明します．問題 (P_k) の変数 x_j の 0-1 条件を $0 \leq x_j \leq 1$ でおきかえた連続緩和問題：

$$(\bar{P}_k)\begin{cases} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + z_k \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \leq b_k \\ & 0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

を考えてみましょう．この問題の最適値を $z(\bar{P}_k)$ とおくと，緩和法の原理により，

$$z(\bar{P}_k) \geq z(P_k)$$

となります．$\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j \leq b_k$ ならば $x_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ が自明な最適解となるので，ここでは，$\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j > b_k$ を仮定します．すると，

$$\sum_{j=1}^{p-1} a_j \leq b_k < \sum_{j=1}^{p} a_j \tag{33}$$

をみたす p が一意的に定まります．この p を用いると，定理 10.1 が示すように，簡単に連続緩和問題の最適解が求まります．

定理 10.1 $(\bar{P}_k)$ の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)^T$ と最適値 $z(\bar{P}_k)$ は *(33)* の p を用いて，

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1, & j = 1, 2, \ldots, p-1 \\ \frac{b_k - \sum_{j=1}^{p-1} a_j}{a_p}, & j = p \\ 0, & j = p+1, p+2, \ldots, m \end{cases}$$

$$z(\bar{P}_k) = \sum_{j=1}^{p-1} c_j + \gamma_p (b_k - \sum_{j=1}^{p-1} a_j) + z_k$$

と書くことが出来ます．

問題 (P_k) の c_j がすべて整数の場合には $z(P_k)$ は整数だから，$z(P_k)$ の上界値 $z(\bar{P}_k)$ の一つとして，

$$U_1 = \sum_{j=1}^{p-1} c_j + [\gamma_p(b_k - \sum_{j=1}^{p-1} a_j)] + z_k$$

が得られます．ここで，実数 a に対して [a] は a の整数部を示しています．

ラグランジュ緩和問題

次に，(P_k) の制約式の一部を目的関数に組み込んだラグランジュ緩和問題：

$$(L_\lambda)\begin{cases} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + \lambda(b_k - \sum_{j=1}^{m} a_j x_j) + z_k \\ \text{subject to} & x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

を考えます．定理 9.2 より，すべての $\lambda \geq 0$ に対して (P_k) と (L_λ) の最適値の間に $z(P_k) \leq z(L_\lambda)$ が成り立つことが分かります．ところが，これから証明するように，

$$\begin{aligned} z(L_\lambda) = & \max\{\lambda b_k + \sum_{j=1}^{m}(c_j - \lambda a_j)x_j \mid x_j \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,m\} + z_k \\ = & \lambda b_k + \sum_{j=1}^{m} \max\{0, c_j - \lambda a_j\} + z_k \equiv h(\lambda) \end{aligned}$$

に対して

$$\min_{\lambda\geq 0} z(L_\lambda) = \min_{\lambda\geq 0} h(\lambda) = z(\bar{P}_k)$$

となり，0-1 ナップザック問題の場合にはラグランジュ緩和問題は連続緩和問題と同じ上界値を与えます．

証明： $h(\lambda)$ の $\lambda \geq 0$ での振舞いを調べてみます．ここで，$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_m$ を考慮すると，

$$\begin{aligned} h(\lambda) = & \lambda b_k + \sum_{j=1}^{m} a_j \max\{0, \gamma_j - \lambda\} + z_k \\ = & \sum_{j=1}^{i-1} a_j\gamma_j + \lambda(b_k - \sum_{j=1}^{i-1} a_j) + z_k, \quad \gamma_i \leq \lambda \leq \gamma_{i-1} \end{aligned}$$

となり，$b_k - \sum_{j=1}^{p} a_j < 0$ かつ $b_k - \sum_{j=1}^{p-1} a_j \geq 0$ なので，$h(\lambda)$ は $\lambda \leq \gamma_p$ で減少関数で，$\lambda \geq \gamma_p$ では増加関数となります．これにより，$h(\lambda)$ の $\lambda \geq 0$ での最小値は $\lambda = \gamma_p$ で実現され，

$$\min_{\lambda\geq 0} z(L_\lambda) = h(\gamma_p) = \sum_{j=1}^{p-1} a_j\gamma_j + \gamma_p(b_k - \sum_{j=1}^{p-1} a_j) + z_k = z(\bar{P}_k)$$

となります． ∎

例 10.1 *0-1* ナップザック問題 *(31)* について，$n = 6$，$b = 11$ とし，c_j と a_j を以下のように設定して，解いてみましょう．分枝する変数として "値が固定されていない最初の変数" を選び，子問題を解く順番については幅優先探索を用いてください．

j	1	2	3	4	5	6
c_j	11	11	14	17	4	1
a_j	2	3	4	6	4	2
γ_j	5.5	3.7	3.5	2.8	1.0	0.5

次の記号を用いて，解法の説明をします (図 5 を参照のこと).

$\hat{f}$: 各子問題での下界値＝貪欲解の目的関数値
$\bar{f}$: 各子問題での上界値＝連続緩和問題の最適値の整数部
f^* : 各子問題での最適値

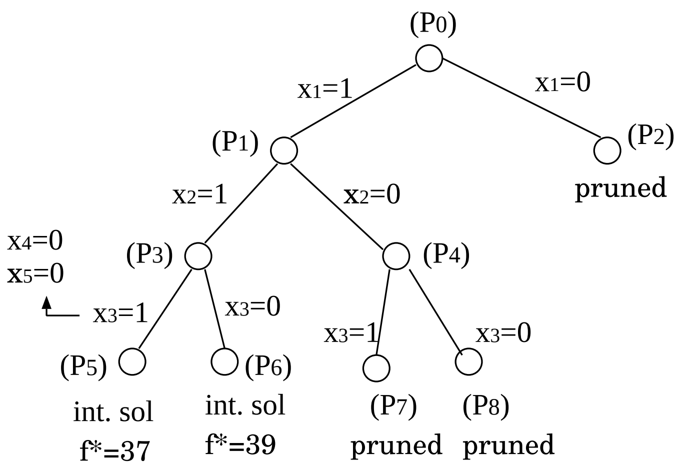

Figure 5: 例 10.1 で生成された木構造

(1.) $P_0 = P$: ($S^+ = \phi$, $S^0 = \phi$, $F = \{1,2,3,4,5,6\}$)
実行可能解: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1$
$\hat{f} = 11 + 11 + 14 + 1 = 37$, 暫定値: 37
緩和解: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 2/6, x_5 = 0, x_6 = 0$
$\bar{f} = 11 + 11 + 14 + [17 \times 2/6] = 41$
未分枝問題： $(P_1), (P_2)$

(2.) $\underline{x_1 = 1}$
P_1: ($S^+ = \{1\}$, $S^0 = \phi$, $F = \{2,3,4,5,6\}$)
実行可能解: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1$
$\hat{f} = 11 + 11 + 14 + 1 = 37$, 暫定値: 37
緩和解: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 2/6, x_5 = 0, x_6 = 0$
$\bar{f} = 11 + 11 + 14 + [17 \times 2/6] = 41$
未分枝問題： $(P_2), (P_3), (P_4)$

(3.) $\underline{x_1 = 0}$
P_2: ($S^+ = \phi$, $S^0 = \{1\}$, $F = \{2,3,4,5,6\}$)
実行可能解: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$
$\hat{f} = 11 + 14 + 4 = 29$, 暫定値: 37
緩和解: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 4/6, x_5 = 0, x_6 = 0$
$\bar{f} = 11 + 14 + [17 \times 4/6] = 36 \leq$ 暫定値 $\rightarrow$ 終わり
未分枝問題： $(P_3), (P_4)$

(4.) $\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 1}$
P_3*: (*$S^+ = \{1, 2\}$*,* $S^0 = \phi$*,* $F = \{3, 4, 5, 6\}$*)*
実行可能解*:* $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1$
$\hat{f} = 11 + 11 + 14 + 1 = 37$, 暫定値*: 37*
緩和解*:* $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 2/6, x_5 = 0, x_6 = 0$
$\bar{f} = 11 + 11 + 14 + [17 \times 2/6] = 41$
未分枝問題： $(P_4), (P_5), (P_6)$

(5.) $\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 0}$
P_4*: (*$S^+ = \{1\}$*,* $S^0 = \{2\}$*,* $F = \{3, 4, 5, 6\}$*)*
実行可能解*:* $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$
$\hat{f} = 11 + 14 + 4 = 29$, 暫定値*: 37*
緩和解*:* $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 5/6, x_5 = 0, x_6 = 0$
$\bar{f} = 11 + 14 + [17 \times 5/6] = 39$
未分枝問題： $(P_5), (P_6), (P_7), (P_8)$

(6.) $\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1} \rightarrow x_4 = x_5 = 0$
P_5*: (*$S^+ = \{1, 2, 3\}$*,* $S^0 = \{4, 5\}$*,* $F = \{6\}$*)*
実行可能解*:* $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1$
$\hat{f} = 11 + 11 + 14 + 1 = 37$, 暫定値*: 37*
緩和解*:* $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1$
$\bar{f} = 11 + 11 + 14 + 1 = 37$ *:* 実行可能解 → 終わり
未分枝問題： $(P_6), (P_7), (P_8)$

(7.) $\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0}$
P_6*: (*$S^+ = \{1, 2\}$*,* $S^0 = \{3\}$*,* $F = \{4, 5, 6\}$*)*
実行可能解*:* $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0$
$\hat{f} = 11 + 11 + 17 = 39$, 暫定値*: 39*
緩和解*:* $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0$
$\bar{f} = 11 + 11 + 17 = 39$ *:* 実行可能解 → 終わり
未分枝問題： $(P_7), (P_8)$

(8.) $\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1}$
P_7*: (*$S^+ = \{1, 3\}$*,* $S^0 = \{2\}$*,* $F = \{4, 5, 6\}$*)*
実行可能解*:* $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$
$\hat{f} = 11 + 14 + 4 = 29$, 暫定値*: 39*
緩和解*:* $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 5/6, x_5 = 0, x_6 = 0$
$\bar{f} = 11 + 14 + [17 \times 5/6] = 39 \leq$ 暫定値 → 終わり
未分枝問題： (P_8)

(9.) $\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0}$
P_8*: (*$S^+ = \{1\}$*,* $S^0 = \{2, 3\}$*,* $F = \{4, 5, 6\}$*)*
実行可能解*:* $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1$
$\hat{f} = 11 + 17 + 1 = 29$, 暫定値*: 39*
緩和解*:* $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 3/4, x_6 = 0$
$\bar{f} = 11 + 17 + [4 \times 3/4] = 31 \leq$ 暫定値 → 終わり
未分枝問題： なし

最適解は，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 1, 0, 1, 0, 0)$ で，最適値は *39* になります．

10.2 実用的なテクニック – 釘付けテスト –

実用的な分枝限定法を構築するために，上界値の強化と釘付けテストの 2 つを紹介します．

10.2.1 上界値の強化

連続緩和問題 $(\bar{P}_k)$ から導かれる上界値は十分強力ですが，次に一層良い上界値を得る方法について説明します．

定理 10.2 *(33)* で定義した p と

$$\sum_{j=1}^{q-1} a_j \le b_k - a_p < \sum_{j=1}^{q} a_j \tag{34}$$

をみたす q $(1 \le q < p)$ に対して，

$$z(P_k) \le \max\left\{\sum_{j=1}^{p-1} c_j + \gamma_{p+1}(b_k - \sum_{j=1}^{p-1} a_j), c_p + \sum_{j=1}^{q-1} c_j + \gamma_q(b_k - a_p - \sum_{j=1}^{q-1} a_j)\right\} + z_k$$

が成り立ちます．

証明：　(P_k) において x_p の値をそれぞれ 0 および 1 に固定した子問題 $(P_k \mid x_p = 0)$ および $(P_k \mid x_p = 1)$ を考えてみます．すると，

$$z(P_k) = \max\{z(P_k \mid x_p = 0), z(P_k \mid x_p = 1)\}$$

となります．$z(P_k \mid x_p = 0)$ については，

$$\begin{aligned} z(P_k \mid x_p = 0) \le \quad & z(\bar{P}_k \mid x_p = 0) \\ = \quad & \max\left\{\sum_{j \ne p} c_j x_j \mid \sum_{j \ne p} a_j x_j \le b_k, 0 \le x_j \le 1, j \ne p\right\} + z_k \\ = \quad & \sum_{j=1}^{p-1} c_j + \gamma_{p+1}\left(b_k - \sum_{j=1}^{p-1} a_j\right) + z_k \end{aligned}$$

定理 10.1 より成り立ちます．一方，

$$\begin{aligned} z(P_k \mid x_p = 1) \le \quad & z(\bar{P}_k \mid x_p = 1) \\ = \quad & c_p + \max\left\{\sum_{j \ne p} c_j x_j \mid \sum_{j \ne p} a_j x_j \le b_k - a_p, 0 \le x_j \le 1, j \ne p\right\} + z_k \end{aligned}$$

であり，条件 (34) を考慮して再び定理 10.1 を適用すると，

$$\begin{aligned} & \max\left\{\sum_{j \ne p} c_j x_j \mid \sum_{j \ne p} a_j x_j \le b_k - a_p, 0 \le x_j \le 1, j \ne p\right\} \\ = \quad & \sum_{j=1}^{q-1} c_j + \gamma_q(b_k - a_p - \sum_{j=1}^{q-1} a_j) \end{aligned}$$

なので，

$$z(P_k \mid x_p = 1) \le c_p + \sum_{j=1}^{q-1} c_j + \gamma_q(b_k - a_p - \sum_{j=1}^{q-1} a_j) + z_k$$

が得られます．よって，命題が成り立つことが示されました．∎

問題 (P_k) の c_i がすべて整数の場合に $z(P_k)$ は整数だから，$z(P_k)$ のもう一つの上界値

$$U_2 = \max\left\{\sum_{j=1}^{p-1} c_j + [\gamma_{p+1}(b_k - \sum_{j=1}^{p-1} a_j)], c_p + \sum_{j=1}^{q-1} c_j + [\gamma_q(b_k - a_p - \sum_{j=1}^{q-1} a_j)]\right\} + z_k$$

が得られます．

例 10.2 例 *10.1* の $(P) = (P_0)$ について，より良い上界値を求めてみましょう．

(33) にあてはめると $p = 4$ が得られます．また，定理 *10.2* を適用すると，$b - a_p = 5$ だから $q = 3$ となり，

$$U_2 = \max\{11 + 11 + 14 + [1 \times 2], 17 + 11 + 11 + [3.5 \times (11 - 6 - 2 - 3)]\} = 39$$

を得ます．これは，連続緩和問題による上界値 $U_1 = \bar{f} = 41$ よりも良いことが分かります．

10.2.2 釘付けテスト

次に，P_k の最適解における変数の値を推定して，その値を固定するための釘付けテストを紹介します．そのために，(33) で与えられる p を用いて

$$\mu_j^* = \begin{cases} c_j - \gamma_p a_j, & j = 1, 2, \ldots, p \\ -c_j + \gamma_p a_j, & j = p+1, p+2, \ldots, m \end{cases}$$

を定義します．(32) より，$\mu_j^* \geq 0 \; j = 1, 2, \ldots, m$ となります．（$a_j, c_j \geq 0$ であることに注意．）

定理 10.3 (P) の暫定値を $\hat{z}$ とし，(P) の連続緩和問題 $(\bar{P}_k)$ の最適値を $z(\bar{P}_k)$ とする．

$$J^* = \{j \mid j \in F, \mu_j^* \geq z(\bar{P}_k) - \hat{z}\}$$

(i) $j \in J^*$ かつ $j < p$ なら，暫定解よりも良い (P_k) の実行可能解は $x_j = 1$ をみたす．

(ii) $j \in J^*$ かつ $j > p$ なら，暫定解よりも良い (P_k) の実行可能解は $x_j = 0$ をみたす．

証明： **定理の証明** (i) と同様に (ii) を証明できるので，ここでは (i) だけを証明します．$j \in J^*$ かつ $j < p$ の場合を考えます．このときに，$x_j = 0$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
& z(P_k \mid x_j = 0) \\
\leq\ & \max\left\{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \gamma_p(b_k - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i) + z_k \mid x_j = 0, x_i \in \{0,1\}, \forall i \neq j\right\} \\
=\ & \gamma_p b_k + \sum_{i=1}^{m} \max\{(c_i - \gamma_p a_i)x_i \mid x_j = 0, x_i \in \{0,1\}, \forall i \neq j\} + z_k \\
=\ & \gamma_p b_k + \sum_{i=1}^{p-1}(c_i - \gamma_p a_i) + z_k - (c_j - \gamma_p a_j) \qquad (j < p \text{ より}) \\
=\ & \sum_{i=1}^{p-1} c_i + \gamma_p(b_k - \sum_{i=1}^{p-1} a_i) + z_k - \mu_j^* \\
=\ & z(\bar{P}_k) - \mu_j^* \\
\leq\ & \hat{z} \qquad (j \in J^* \text{ より})
\end{aligned}$$

となります．従って，暫定解より良い (P_k) の実行可能解はすべて $x_j = 1$ を満たさなくてはなりません． ∎

この定理を使えば，(P_k) においていくつかの変数を 0 または 1 に釘付けして，問題の規模を縮小することが可能となります．しかし，各子問題 (P_k) に対して毎回釘付けテストを行うのは手間がかかり過ぎるので，実際にはもとの問題 (P) に対してのみ，この釘付けテストを実施するのがよいでしょう．

例 10.3 例 *10.1* の $(P) = (P_0)$ について，暫定値 $\hat{f} = 37$ を用いて上記の釘付けテストしてみましょう．

$$p = 4,\ z(\bar{P}) = 11 + 11 + 14 + 17 \times 2/6 = 41\tfrac{2}{3},\ z(\bar{P}) - \hat{f} = 4\tfrac{2}{3}$$
$$\gamma_p = \tfrac{17}{6},\ \mu_1^* = 5\tfrac{1}{3},\ \mu_2^* = 2\tfrac{1}{2},\ \mu_3^* = 2\tfrac{2}{3},\ \mu_5^* = 7\tfrac{1}{3},\ \mu_6^* = 4\tfrac{2}{3},$$

だから，$x_1 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$ と釘付けすることが可能になります．

また，ここでより良い暫定解 $\hat{\boldsymbol{x}} = (1, 1, 0, 1, 0, 0)$ による暫定値 $\hat{f} = 39$ を用いると $z(\bar{P}) - \hat{f} = 2\frac{2}{3}$ なので，さらに $x_3 = 1$ に固定することができます．しかし，この場合には暫定値よりも小さい値になるので，暫定解よりも良い解は存在しない，つまり暫定解 $\hat{\boldsymbol{x}} = (1, 1, 0, 1, 0, 0)$ が最適解であることが分かります．

10.3　演習問題

演習問題 10.1 定理 *10.1* を証明せよ．

演習問題 10.2 *0-1* ナップザック問題 *(31)* について，$n = 6$，$b = 15$ とし，c_j と a_j を以下のように設定します．

j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
c_j	*4*	*21*	*9*	*15*	*9*	*1*
a_j	*1*	*6*	*3*	*8*	*6*	*5*

この問題の連続緩和問題より得られる緩和値 *(*上界値*)*，そして上界値強化のテクニックを用いて算出した上界値を示しなさい．

演習問題 10.3 演習問題 *10.2* の *0-1* ナップザック問題に対し，各変数について釘付けテストを行ないなさい．

演習問題 10.4 最良上界探索を用いて演習問題 *10.2* の *0-1* ナップザック問題を解きなさい．

演習問題 10.5 例 *10.1* の *0-1* ナップザック問題を深さ優先探索・最良上界探索を用いて解き，*3* つの探索方法により生成される列挙木の違いを比較検討せよ．

演習問題 10.6 定理 *10.3* の *(ii)* を証明せよ．