7　輸送問題

輸送問題は線形計画問題の特殊ケースで，複数の供給地から複数の需要地への物資を運ぶ最適計画を求めるための問題です．線形計画問題の汎用的な解法であるシンプレックス法を用いて解くことができますが，一般の線形計画問題から区別されるのは，その構造の特殊性から，シンプレックス法よりもはるかに効率の良い解法が用意されているからです．

7.1　輸送問題とは

例 7.1 ある会社が 1 種類の製品を m 箇所の倉庫から n 箇所の販売店に輸送しようとしている．

a_i　:　倉庫 i にある製品の総量
b_j　:　販売店 j での製品の必要量
c_{ij}　:　倉庫 i から販売店 j への製品 1 単位当たりの輸送費用

とする．輸送にかかる総費用を最小化する問題を定式化せよ．

解説　倉庫 i から販売店 j への輸送量を x_{ij} であらわします．倉庫 i から積み出される製品の総量は a_i より大きくなれないから，不等式

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{19}$$

を満たさなければなりません．販売店 j は製品 b_j だけ輸送されることより，

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

また，倉庫 i から販売店 j への輸送量 x_{ij} は非負でなければなりません．すなわち，

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

したがって，制約条件式 (19) (20) (21) のもとで，輸送にかかる総費用

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

を最小にすればよいことになります．以上をまとめると次の線形計画問題が得られます．

$$\begin{cases} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{22}$$

7.2 輸送問題の標準形

$$
\begin{cases}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,\ldots,m) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1,\ldots,n) \\
& x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)
\end{cases}
\tag{23}
$$

ここで，$c_{ij}, a_i, b_j\ (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$ は非負の実数で等式

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

を満たします．この条件はすべての倉庫にある製品の総量とすべての販売店での製品の総需要が一致することを意味しています．

a_i, b_j, c_{ij} が表 1，表 2

Table 1: 製品の供給量 a_i，需要量 b_j と輸送量 x_{ij}

j / i	販売店 1	2	3	4	a_i
倉庫 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	16
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	9
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	6
b_j	13	8	7	3	

Table 2: 輸送費用 c_{ij}

j / i	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	8	4	2	1
3	2	5	6	2

で与えられる輸送問題の標準形は以下のようになります．

$$
\begin{cases}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\
\text{subject to} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1 \qquad \text{(a)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 \qquad \text{(b)} \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3 \qquad \text{(c)} \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 \qquad \text{(d)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \qquad \text{(e)} \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 \qquad \text{(f)} \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4 \qquad \text{(g)} \\
& x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)
\end{cases}
$$

ただし，a_i, b_j, c_{ij} は表 1，表 2 で与えられ，等式

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 31$$

も成立しています．本章の残りの部分ではこの例を用いて輸送問題の解法を説明します．

条件式のうちの一本は余分なものです．実際，式 (d) から式 (g) までを加えて，その和から式 (b) と式 (c) を引くと式 (a) になり，このことは，(b)∼(g) だけをこの問題の条件式とすればよいことを意味しています．一般の標準形においても，$(m+n)$ 本の条件式のうち 1 本は余分でそれを取り除くことができます．したがって，$(m+n-1)$ 個の正の要素をもつ実行可能解 $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn})$ が基底実行可能解ということになります．上の問題では $3+4-1=6$ 個の正の要素をもつ基底実行可能解が存在することになります．

7.3　北西隅ルール

２段階シンプレックス法の第１段階を適用すれば１つの基底実行可能解が求められますが，ここではより簡単な北西隅ルールについて説明します．

（１）表１において，北西隅にある要素 x_{11} を許される範囲で最大にとります．すなわち，

$$x_{11} = \min\{a_1,\ b_1\} = b_1 = 13$$

とします．x_{11} が決定されると同時に，

$$x_{21} = x_{31} = 0$$

でなければならないことがわかります．その結果，表３が得られます．表３においては，すでに決定した $x_{11} = 13$ を表１の a_1 と b_1 から引いた残りを，a_1 と b_1 として書きこんでいます．

Table 3:

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	13	x_{12}	x_{13}	x_{14}	3
2	0	x_{22}	x_{23}	x_{24}	9
3	0	x_{32}	x_{33}	x_{34}	6
b_j	0	8	7	3	

（２）表３において，まだ決定されていない変数 x_{ij} のうち北西隅にある変数 x_{12} を許される限り最大にとります．すなわち，

$$x_{12} = \min\{a_1,\ b_2\} = a_1 = 3$$

とします．これと同時に，

$$x_{13} = x_{14} = 0$$

も定まり，その結果，表４が得られます．ここで，値が０の要素は空欄にしてあります．

Table 4:

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	13	3			
2		x_{22}	x_{23}	x_{24}	9
3		x_{32}	x_{33}	x_{34}	6
b_j		5	7	3	

以下同様に，

（３）

$$\begin{aligned} x_{22} &= \min\{a_2,\ b_2\} = b_2 = 5 \\ x_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Table 5:

j / i	1	2	3	4	a_i
1	13	3			
2		5	x_{23}	x_{24}	4
3			x_{33}	x_{34}	6
b_j			7	3	

（４）

$$\begin{aligned} x_{23} &= \min\{a_2,\ b_3\} = a_2 = 4 \\ x_{24} &= 0 \end{aligned}$$

Table 6:

j / i	1	2	3	4	a_i
1	13	3			
2		5	4		
3			x_{33}	x_{34}	6
b_j			3	3	

（５）

$$x_{33} = \min\{a_3,\ b_3\} = b_3 = 3$$

Table 7:

j / i	1	2	3	4	a_i
1	13	3			
2		5	4		
3			3	x_{34}	3
b_j				3	

（６）

$$x_{34} = \min\{a_3,\ b_4\} = 3$$

Table 8:

j / i	1	2	3	4	a_i
1	13	3			
2		5	4		
3			3	3	
b_j					

これで１つの基底実行可能解 $\boldsymbol{x}^1$ が求まりました．基底変数は x_{11},x_{12},x_{22},x_{23},x_{33},x_{34} で，その値は，

$$x_{11}{}^1 = 13,\ x_{12}{}^1 = 3,\ x_{22}{}^1 = 5,\ x_{23}{}^1 = 4,\ x_{33}{}^1 = 3,\ x_{34}{}^1 = 3$$

になります．また，目的関数の値は，

$$
\begin{aligned}
{z_0}^1 &= c_{11}{x_{11}}^1 + c_{12}{x_{12}}^1 + c_{22}{x_{22}}^1 + c_{23}{x_{23}}^1 + c_{33}{x_{33}}^1 + c_{34}{x_{34}}^1 \\
&= 87
\end{aligned}
$$

となります．

7.4　新しい基底実行可能解の求め方

非基底変数を 1 つ選んでそれを新しく基底変数に入れたときの基底実行可能解の求め方について説明します．これから非基底変数 x_{21} を新しく基底変数に入れる場合について考えます．

（１）表 8 において，空欄になっている（2,1）要素に θ を入れて x_{21} 要素の値を増やします．

（２）それと同時に，基底変数のいくつかから θ を引き，他のいくつかの基底変数に θ を加えることによって許容解が得られます．そのためには表 9 のようにします．

Table 9:

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	$13-\theta$	$3+\theta$			
2	θ	$5-\theta$	4		
3			3	3	
b_j					

（３）表 9 において θ の値を大きくしてゆくと，$\theta = 5$ において，基底変数 x_{22} の値が 0 になり，新しい基底実行可能解が得られます.（⇒ 表 10）

Table 10:

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	8	8			
2	5		4		
3			3	3	
b_j					

7.5　目的関数値の変化

表 9 において，x_{21} の値 θ を増やすと，目的関数の値は，

$$-c_{11} + c_{12} + c_{21} - c_{22}$$

の割合で変化することがわかります．この値を $\bar{c}_{21}$ とおきます．この場合には，

$$\bar{c}_{21} = -c_{11} + c_{12} + c_{21} - c_{22} = 5 > 0$$

となるから，x_{21} を新しい基底変数に選んだとすると目的関数値は増えてしまいます．

目的関数値を減少させるためには　$\bar{c}_{ij} < 0$ なる非基底変数 x_{ij} を選んでそれを新しく入れる基底変数にします．$\bar{c}_{ij}$ の効率的な計算方法は次の通りです．

（１）基底変数 x_{ij} に対応する c_{ij} だけを○で囲んで記入した表 11 を準備します．

Table 11:

i \ j	1	2	3	4	u_i
1	②	③			
2		④	②		
3			⑥	②	
v_j					

（２）この表において記入されている c_{ij} に u_i と v_j の和が一致するように u_i と v_j を決めます．すなわち，線形方程式系

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 & + & v_1 & = & c_{11} & = & 2 \\ u_1 & + & v_2 & = & c_{12} & = & 3 \\ u_2 & + & v_2 & = & c_{22} & = & 4 \\ u_2 & + & v_3 & = & c_{23} & = & 2 \\ u_3 & + & v_3 & = & c_{33} & = & 6 \\ u_3 & + & v_4 & = & c_{34} & = & 2 \end{array}$$

を解きます．この方程式系は 7 個の変数と 6 個の方程式より成り，変数の個数が方程式の個数より 1 つ多くなっています．したがって，その解は一意的ではありません．そこで，変数の 1 つ，たとえば u_1 を 0 にきめると，残りの変数は簡単に計算できて表 12 のようになります．

（３）各非基底変数 x_{ij} に対して

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

とおき，その値を表に書きこみます．その結果，表 13 が得られます．

Table 12:

i \ j	1	2	3	4	u_i
1	②	③			0
2		④	②		1
3			⑥	②	5
v_j	2	3	1	-3	

Table 13:

i \ j	1	2	3	4	u_i
1	②	③	3	8	0
2	5	④	②	3	1
3	-5	-3	⑥	②	5
v_j	2	3	1	-3	

各自，

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = -c_{11} + c_{12} + c_{21} - c_{22}$$

となっていることを確かめてください．

7.6　第２段階

準備が整ったので表 8 に示された基底実行可能解を出発点として最小基底解の算出を試みます．

（１）表 13 によって，１つの非基底変数 x_{ij} を新しく基底変数に入れようとしたときの目的関数の変化する割合 $\bar{c}_{ij}$ が計算できます．

$$\bar{c}_{31} = -5 < 0$$

であるから x_{31} を新しく基底変数にいれることにきめて，表 8 に θ を書き入れた表 14 を作ります．θ を増やすと $\theta = \theta^* = 3$ で表 15 に示された基底実行可能解 $\boldsymbol{x}^2$ が得られます．このときの目的関数値は，

$$z_0^2 = z_0^1 + \bar{c}_{31}\theta^* = 87 - 5 \times 3 = 72$$

で計算されます．

Table 14:

i \ j	1	2	3	4
1	$13-\theta$	$3+\theta$		
2		$5-\theta$	$4+\theta$	
3	θ		$3-\theta$	3

Table 15:

i \ j	1	2	3	4
1	10	6		
2		2	7	
3	3			3

（２）表 15 で与えられる基底実行可能解 $\boldsymbol{x}^2$ に対して，u_i, v_j, $\bar{c}_{ij}$ を計算すると表 16 が得られます．

$$\bar{c}_{24} = -2 < 0$$

なので，x_{24} を新しく基底変数に入れると（表 17），表 18 で示される基底実行可能解 $\boldsymbol{x}^3$ が得られます．このとき，$\theta^* = 2$ なので，対応する目的関数値は，

$$z_0^3 = z_0^2 + \bar{c}_{24}\theta^* = 72 - 2 \times 2 = 68$$

となります．

Table 16:

i \ j	1	2	3	4	u_i
1	②	③	3	3	0
2	5	④	②	-2	1
3	②	2	5	②	0
v_j	2	3	1	2	

Table 17:

i \ j	1	2	3	4
1	$10-\theta$	$6+\theta$		
2		$2-\theta$	7	θ
3	$3+\theta$			$3-\theta$

Table 18:

i \ j	1	2	3	4
1	8	8		
2			7	2
3	5			1

（３）表 18 で与えられる基底実行可能解 $\boldsymbol{x}^3$ に対して，u_i, v_j, $\bar{c}_{ij}$ を計算すると表 19 が得られます．非基底変数に対する $\bar{c}_{ij}$ がすべて非負なので，$\boldsymbol{x}^3$ は最小基底実行可能解であることがわかります．

Table 19:

i \ j	1	2	3	4	u_i
1	②	③	1	3	0
2	7	2	②	①	-1
3	②	2	3	②	0
v_i	2	3	3	2	

7.7 最小費用流問題

頂点集合 V，辺集合 E，各辺に対する（非負の）コスト c と（非負の）容量を u として定義された有向グラフ $G(V, E, c, u)$ を考える．さらに各頂点に対して，供給量 $b(v)$ $(v \in V)$ が与えられているとする．

この時，**最小費用流問題**とは以下のように定式化された問題である．

$$\begin{cases} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,w)\in E} c(v,w)f(u,w) \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{w\in V} f(v,w) - \sum_{w\in V} f(w,v) = b(v),\ v\in V \\ & 0 \le f(v,w) \le u(v,w),\ (v,w)\in E \end{cases} \tag{24}$$

上記の全ての制約を満たす $f(u,w)$ $((u,w)\in E)$ は**実行可能流**と呼ばれる．供給量 $b(v)$ は実数でよいが，需要量の総和と供給量の総和が等しくなければ問題 (24) は解を持たないので

$$\sum_{v\in V} b(v) = 0$$

とする．

輸送問題は最小費用流問題の特殊な場合である．例題に対応する最小費用流問題は図 1 の通りである．

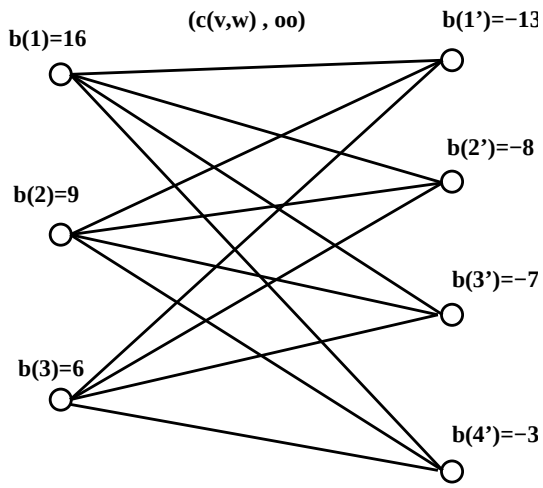

Figure 1: 最小費用流問題 (左の頂点が倉庫に対応，右の頂点が販売店に対応）．

7.8 演習問題

演習問題 7.1 a_i, b_j, c_{ij} が表 20 と表 21 で与えられる輸送問題を解きましょう．

Table 20:

i \ j		販売店 1	2	3	4	a_i
倉庫	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	23
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	17
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	7
	4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	11
	b_j	13	5	9	31	

Table 21: 輸送費用 c_{ij}

i \ j	1	2	3	4
1	25	30	10	30
2	50	10	15	20
3	10	40	20	20
4	40	25	25	40

演習問題 7.2 例 *7.1* の問題 (22) において，

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

であれば実行可能解が存在しないことを示しなさい．

演習問題 7.3 例 *7.1* の問題 (22) において，

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

であれば，その問題は標準形 (23) と等価であることを示しなさい．

演習問題 7.4 例 *7.1* の問題 (22) において，

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

であれば，$(n+1)$ 番目の販売店を人工的に作り，

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \\ c_{i(n+1)} &= 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

とおくことによって，定式化した問題は標準形 (23) に帰着されることを示しなさい．

演習問題 7.5 表 *1* を用いて，“ 北東隅ルール ” で基底実行可能解を 1 つ求めよ．また，“ 輸送費用 c_{ij} が最小のものから変数 x_{ij} を決定してゆく ” というルールにしたがって，基底実行可能解を 1 つ求めよ．