

6 感度分析 (sensitivity analysis)

この章ではシンプレックス法などで求めた最適値や最適解が目的関数ベクトル $\mathbf{c}$ 、制約行列 $\mathbf{A}$ や制約ベクトル $\mathbf{b}$ にどのように依存するかを考える。実用的な問題ではそのようなデータの変動が起こりうるので求めた最適解がデータの曖昧さに影響されないことが望ましい。

今までの議論を継承して、標準形の線形計画問題を考える。

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (10)$$

行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ のランクが m だと仮定し、最適解 $\mathbf{x}^* = ((\mathbf{x}_B^*)^T, (\mathbf{x}_N^*)^T)^T$ と付随する基底行列 $\mathbf{B}$ が求まっているとする。つまりタブローを考えると

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_B \\ z \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N \\ \hline \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N \end{array} \right] \mathbf{x}_N$$

となり、最適解では $\mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N \geq \mathbf{0}^T$ となることが分かっている。

以下のケースについてそれぞれ考えることにする。

- LPに新しい変数を追加する；
- LPに新しい不等式制約を追加する；
- LPに新しい等式制約を追加する；
- LPの制約ベクトル $\mathbf{b}$ を変更する；
- LPの目的関数ベクトル $\mathbf{c}$ を変更する；

なお、制約行列 $\mathbf{A}$ の変更に対する感度分析も可能であるが、今回は扱わないことにする。

6.1 新しい変数を追加した場合

標準形の線形計画問題 (10) に新しい変数 x_{n+1} 、目的関数ベクトルの要素 c_{n+1} と列 $\mathbf{A}_{n+1} \in \mathbb{R}^m$ を追加したとしよう。

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_{n+1}x_{n+1} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}_{n+1}x_{n+1} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, x_{n+1} \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

現在の（最適）基底行列 $\mathbf{B}$ が新しい問題においても最適であるかを考える。

$\hat{\mathbf{x}}^* = ((\mathbf{x}^*)^T, 0)^T$ は $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ であるので基底実行可能解であることがわかる。つまり、この新しい基底実行可能解に対して減少コストが非負であれば、それは問題 (11) の最適解になる。新しく追加された列 $\mathbf{A}_{n+1}$ が影響するのは該当する添字の減少コストだけであるので

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{n+1} \geq 0$$

が満たされていれば良いことになる。

もし上記の減少コストが負であれば、シンプレックスタブローに新たに列を一つ追加し、シンプレックス法を続けることになるが、少ない反復回数で最適解が求まることが期待できる。

例 6.1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - x_2 + 12x_3 \\ \text{subject to} & +3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & +5x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

の最適解は $(2, 2, 0, 0)^T$ であり，該当するタブローは次のようになる．

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 + 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 & = & 2 - 5x_3 + 3x_4 \\ \hline z & = & -12 + 2x_3 + 7x_4 \end{array}$$

幸いにも $-\mathbf{B}^{-1}$ は上記のタブローの最後の 2 列に一致する．ここで新たに次の問題を考える．

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - x_2 + 12x_3 - x_5 \\ \text{subject to} & +3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ & +5x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 16 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

追加された変数に対する減少コストは

$$\bar{c}_5 = c_5 - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_5 = -1 - (-5 \ -1) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$$

となるので $(2, 2, 0, 0, 0)^T$ は問題 (13) の最適解にならないことがわかる．そこで

$$-\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_5 = - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となるので，タブローを以下のように作る．

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \\ x_2 & = & 2 - 5x_3 + 3x_4 - 2x_5 \\ \hline z & = & -12 + 2x_3 + 7x_4 - 4x_5 \end{array}$$

つまりタブローシンプレックス法の反復で x_5 を基底に入れ， x_2 を基底から出すと以下ようになる．

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 & = & 1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ \hline z & = & -16 + 2x_2 + 12x_3 + x_4 \end{array}$$

結局，最適解は $(3, 0, 0, 0, 1)^T$ ，最適値は -16 となり，1 反復で求まった．

6.2 新しい不等式制約を追加した場合

標準形の線形計画問題 (10) に新しい不等式制約 $\mathbf{a}_{m+1}^T \mathbf{x} \geq b_{m+1}$ を追加するとしよう．もし $\mathbf{a}_{m+1}^T \mathbf{x}^* \geq b_{m+1}$ であれば，新しい問題でも $\mathbf{x}^*$ は最適解であり続ける．もしそうでなければ新しいスラック変数 $x_{n+1} \geq 0$ を導入し， $\mathbf{a}_{m+1}^T \mathbf{x} - x_{n+1} = b_{m+1}$ の等式制約を (10) に追加する．

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + 0x_{n+1} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} + 0x_{n+1} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{a}_{m+1}^T \mathbf{x} - x_{n+1} = b_{m+1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, x_{n+1} \geq 0 \end{array} \right.$$

現在の（最適）基底変数と新たに追加したスラック変数 x_{n+1} を基底変数とすると，新たな基底行列は

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{a}}_B^T & -1 \end{pmatrix}$$

となり、 $\hat{\mathbf{a}}_B$ は $\mathbf{a}_{m+1}$ の元問題 (10) の (最適) 基底変数の添字に相当する要素を持つベクトルである。 $\mathbf{B}$ は正則行列であったので、 $\hat{\mathbf{B}}$ の行列式は非零であり、正則行列である。さらにその逆行列は

$$\hat{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{B}^{-1} & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる。よって新たな基底変数は

$$\hat{\mathbf{x}}_B^* = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B^* \\ \hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{x}_B^* - b_{m+1} \end{pmatrix} \not\geq \mathbf{0} \quad (15)$$

となる。 $\hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{x}_B^* = \mathbf{a}_{m+1}^T \mathbf{x}^*$ に注意。

さらに減少コストを考えてみると

$$(\mathbf{c}^T \ 0) - (\mathbf{c}_B^T \ 0) \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{B}^{-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{m+1}^T & -1 \end{pmatrix} = (\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \ 0) \geq \mathbf{0}^T$$

となるので、 $\hat{\mathbf{B}}$ は双対問題において基底実行可能解 $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{B}}^{-T} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ 0 \end{pmatrix}$ をもたらしので双対シンプレックス法を適用することができる。

新たなタブローの係数は

$$-\hat{\mathbf{B}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_N & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{a}}_N^T & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_N & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_N - \hat{\mathbf{a}}_N^T & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

として求まる。

例 6.2 前例 6.1 の問題 (12) において不等式制約 $x_1 + x_2 \geq 5$ の追加を行う。 $\mathbf{x}^* = (2, 2, 0, 0)^T$ はこの不等式を満たさない。

それで元のタブローから新タブローの係数を計算する。

$$\hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{x}_B^* - b_{m+1} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 = -1$$

$$-\hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_N + \hat{\mathbf{a}}_N^T = -(1 \ 1) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0 \ 0) = (-2 \ 1)$$

よって

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & 2 & + \ 3x_3 \ - \ 2x_4 \\ x_2 & = & 2 & - \ 5x_3 \ + \ 3x_4 \\ x_5 & = & -1 & - \ 2x_3 \ + \ x_4 \\ \hline z & = & -12 & + \ 2x_3 \ + \ 7x_4 \end{array}$$

となり、双対シンプレックス法で x_5 を基底から出し、 x_4 を基底に入れると

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & 0 & - \ x_3 \ - \ 2x_5 \\ x_2 & = & 5 & + \ x_3 \ + \ 3x_5 \\ x_4 & = & 1 & + \ 2x_3 \ + \ x_5 \\ \hline z & = & -5 & + \ 16x_3 \ + \ 7x_5 \end{array}$$

となるので、最適解 $\hat{\mathbf{x}}^* = (0, 5, 0, 1, 0)^T$ と最適値 -5 が求まった。

6.3 新しい等式制約を追加した場合

標準形の線形計画問題 (10) に新しい等式制約 $\mathbf{a}_{m+1}^T \mathbf{x} = b_{m+1}$ を追加し, $\mathbf{x}^*$ がこの等式を満たさないことを仮定する. 先ほどと同様な手順をとると新たに導入する基底行列が正則でない可能性が残るので, ここでは次のような手順を用いる.

まず, 一般性を失うことなく $\mathbf{a}_{m+1}^T \mathbf{x}^* > b_{m+1}$ と仮定する. そして非常に大きな正の定数 M を用いて以下の補助問題を作る.

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + Mx_{n+1} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} + 0x_{n+1} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{a}_{m+1}^T \mathbf{x} - x_{n+1} = b_{m+1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, x_{n+1} \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

上記の問題に対する (最適) 基底行列の逆行列 $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$, 基底変数 $\hat{\mathbf{x}}_B^*$, タブローの係数はそれぞれ (14), (15), (16) で求まる. さらに仮定より基底変数は (15) より非負であるので, $\hat{\mathbf{x}}^*$ は基底実行可能解になっている. つまり通常のタブローシンプレックス法を適用できる. 従って, 減少コストについては

$$(\mathbf{c}^T \ M) - (\mathbf{c}_B^T \ M) \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{B}^{-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{m+1}^T & -1 \end{pmatrix} = (\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - M(\hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{a}_{m+1}^T) \ 0)$$

となる.

例 6.3 例 6.1 の問題 (12) において等式制約 $-x_1 + x_2 = -1$ の追加を行う. $\mathbf{x}^* = (2, 2, 0, 0)^T$ はこの等式を満たさない. それで元のタブローから新タブローの係数を計算する.

$$\hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{x}_B^* - b_{m+1} = (-1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - (-1) = 1$$

$$-\hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_N + \hat{\mathbf{a}}_N^T = -(-1 \ 1) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0 \ 0) = (-8 \ 5)$$

補助問題において $M = 100$ とおき, 新たに減少コストベクトルを計算する.

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - M(\hat{\mathbf{a}}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{a}_{m+1}^T) \\ = & (-5 \ -1 \ 12 \ 0) - (-5 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} - 100 \left((-1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} - (-1 \ 1 \ 0 \ 0) \right) \\ = & (0 \ 0 \ -798 \ 507) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 \\ x_2 & = & 2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 \\ x_5 & = & 1 & - & 8x_3 & + & 5x_4 \\ \hline z & = & 88 & - & 798x_3 & + & 507x_4 \end{array}$$

となり, タブローシンプレックス法で x_3 を基底に入れ, x_5 を基底から出すと

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & \frac{19}{8} & - & \frac{1}{8}x_4 & - & \frac{3}{8}x_5 \\ x_2 & = & \frac{11}{8} & - & \frac{1}{8}x_4 & + & \frac{5}{8}x_5 \\ x_3 & = & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8}x_4 & - & \frac{1}{8}x_5 \\ \hline z & = & -\frac{47}{4} & + & \frac{33}{4}x_4 & + & \frac{798}{8}x_5 \end{array}$$

となるので, $\hat{\mathbf{x}}^* = (\frac{19}{8}, \frac{11}{8}, \frac{1}{8}, 0)^T$ という新たな最適解と $-\frac{47}{4}$ という最適値が求まる.

6.4 制約ベクトル $\mathbf{b}$ を変更する

標準形の線形計画問題 (10) の制約ベクトル $\mathbf{b}$ を摂動した時に現在求めている最適解が変わるかを調べる。もちろん $\mathbf{b}$ の全ての要素を同時に変更することは可能であるが、記号が繁雑になるので $\mathbf{b}$ を $\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_i$ で置き換えた操作を考える。

この置き換えにより目的関数値は変化しないが $\mathbf{x}^*$ が実行可能解でなくなる可能性がある。つまり、 $\mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ であったが、 $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_i)$ が非負でなくなる場合がある。 $\mathbf{B}^{-1}$ の i 列目を $\mathbf{q} = (\beta_{1i}, \dots, \beta_{mi})^T$ と呼ぶと、この条件は

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_i) = \mathbf{x}_B^* + \delta \mathbf{q}$$

となる。このベクトルの非負性を保つためには δ が以下の範囲に収まればよいことになる。

$$\max_{\{j \mid \beta_{ji} > 0\}} \left(-\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}} \right) \leq \delta \leq \min_{\{j \mid \beta_{ji} < 0\}} \left(-\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}} \right) \quad (18)$$

すると、新たな最適解は $\hat{\mathbf{x}}_B^* = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_i) = \mathbf{x}_B^* + \delta \mathbf{q}$ となり、最適値は

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_i) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^* + \delta \mathbf{c}_B^T \mathbf{q}$$

に変わる。

もし δ が (18) の範囲を越えれば、双対シンプレックス法を用いて新たな最適解と最適値を計算できる。

例 6.4 例 6.1 の問題 (12) において $b_1 = 10$ を $10 + \delta$ に変更することを考える。

$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ であるので、 $\mathbf{q} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 、そして $\mathbf{x}_B^* = (2 \ 2)^T$ であった。

結局

$$-\frac{2}{5} \leq \delta \leq \frac{2}{3}$$

が得られる。最適解は δ が上の範囲内であれば $\hat{\mathbf{x}}^* = (2 - 3\delta \ 2 + 5\delta \ 0 \ 0)^T$ 、最適値は $-12 + \delta(-5 - 1)(-3 \ 5)^T = -12 + 10\delta$ となる。

6.5 目的関数ベクトル $\mathbf{c}$ を変更する

標準形の線形計画問題 (10) の目的関数ベクトル $\mathbf{c}$ を摂動した時に現在求めている最適解が変わるかを調べる。もちろん $\mathbf{c}$ の全ての要素を同時に変更することは可能であるが、記号が繁雑になるので $\mathbf{c}$ を $\mathbf{c} + \delta \mathbf{e}_j$ で置き換えた操作を考える。

この置き換えにより、最適解 $\mathbf{x}^*$ の実行可能性は変更しない。それで、減少コストベクトルの変化を考えてみる。 $\mathbf{x}^*$ の最適性から $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ となることが分かっている。目的ベクトルを $\mathbf{c}$ から $\mathbf{c} + \delta \mathbf{e}_j$ に変更し、 j が非基底変数の添字であれば

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \leq c_j + \delta$$

となるので結局 $\delta \geq -\bar{c}_j$ となる。つまりこの条件が成り立てば最適解 $\mathbf{x}^*$ は変わらない。

もし j が基底変数の添字だとすると $j = B(\ell)$ ととり

$$(\mathbf{c}_B + \delta \mathbf{e}_\ell)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i \leq c_i, \quad \forall i \neq B(1), \dots, B(m)$$

となるので結局

$$\delta \mathbf{e}_\ell^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i \leq \bar{c}_i, \quad \forall i \neq B(1), \dots, B(m)$$

が満たされれば、 $\mathbf{x}^*$ の最適性が保たれ、最適値は $(\mathbf{c}_B + \delta \mathbf{e}_\ell)^T \mathbf{x}_B^*$ となる。

もしそれらの条件が満たされなければシンプレックス法を用いて新たな最適解と最適値を計算できる。

例 6.5 例 6.1 の問題 (12) において目的関数ベクトル $(-5 \ -1 \ 12 \ 0)^T$ を $(-5 + \delta_1 \ -1 \ 12 \ 0)^T$, $(-5 \ -1 + \delta_2 \ 12 \ 0)^T$, $(-5 \ -1 \ 12 + \delta_3 \ 0)^T$, $(-5 \ -1 \ 12 \ \delta_4)^T$ の 4 つのケースに変更した時に $\mathbf{x}^*$ が最適解である続けるための条件をそれぞれ考える。

$(-5 + \delta_1 \ -1 \ 12 \ 0)$ の場合 $\mathbf{x}_1^*$ は基底変数であるので

$$\begin{aligned} 2 &\geq \mathbf{e}_1^T \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_1 \Leftrightarrow \delta_1 \geq -\frac{2}{3} \\ 7 &\geq \mathbf{e}_1^T \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta_1 \Leftrightarrow \delta_1 \leq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

結局

$$\delta_1 \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{7}{2}\right]$$

であれば $\mathbf{x}^* = (2 \ 2 \ 0 \ 0)^T$ は最適解であることが分かる。

$(-5 \ -1 + \delta_2 \ 12 \ 0)$ の場合 $\mathbf{x}_2^*$ は基底変数であるので

$$\begin{aligned} 2 &\geq \mathbf{e}_2^T \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_2 \Leftrightarrow \delta_2 \leq \frac{2}{5} \\ 7 &\geq \mathbf{e}_2^T \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta_2 \Leftrightarrow \delta_2 \geq -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

結局

$$\delta_2 \in \left[-\frac{7}{3}, \frac{2}{5}\right]$$

であれば $\mathbf{x}^* = (2 \ 2 \ 0 \ 0)^T$ は最適解であることが分かる。

$(-5 \ -1 \ 12 + \delta_3 \ 0)$ の場合 $\mathbf{x}_3^*$ は非基底変数であるので $\delta_3 \geq -2$ となる。結局

$$\delta_3 \in [-2, +\infty)$$

であれば $\mathbf{x}^* = (2 \ 2 \ 0 \ 0)^T$ は最適解であることが分かる。

$(-5 \ -1 \ 12 \ \delta_4)$ の場合 $\mathbf{x}_4^*$ は非基底変数であるので $\delta_4 \geq -7$ となる。結局

$$\delta_4 \in [-7, +\infty)$$

であれば $\mathbf{x}^* = (2 \ 2 \ 0 \ 0)^T$ は最適解であることが分かる。

6.6 演習問題

演習問題 6.1 例 5.4 の双対問題において目的関数を

(a) $240x_1 + 90x_2 + 80x_3$;

(b) $20x_1 + 90x_2 + 100x_3$;

に変更した時の最適解が変更するかどうかを判定せよ。

演習問題 6.2 次の標準形の線形計画問題

$$\begin{cases} \text{minimize} & x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

に対して以下の問いに答えよ.

- (a) タブローシンプレックス法で最適解と最適値を求めよ；
- (b) 新しい変数 x_7 と $c_7 = -1$, $\mathbf{A}_7 = (0 \ 1 \ 1)^T$ を追加した問題の最適解と最適値を求めよ；
- (c) 不等式制約 $x_1 + x_2 - x_3 + x_6 \leq 2$ を追加した問題の最適解と最適値を求めよ；
- (d) 等式制約 $-x_2 - x_4 + x_5 = 5$ を追加した問題の最適解と最適値を求めよ；
- (e) $\mathbf{b}$ を $(b_1 + \delta_1 \ b_2 \ b_3)^T$, $(b_1 \ b_2 + \delta_2 \ b_3)^T$, $(b_1 \ b_2 \ b_3 + \delta_3)^T$ に変更した時, (a) で求めた基底 (行列) が変更した問題でも (最適) 基底であり続けるための条件を求めよ. また, それぞれの最適解と最適値を求めよ.
- (f) $\mathbf{c}$ を $(c_1 + \sigma_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)^T$, $(c_1 \ c_2 + \sigma_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)^T$, $(c_1 \ c_2 \ c_3 + \sigma_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)^T$, $(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 + \sigma_4 \ c_5 \ c_6)^T$, $(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 + \sigma_5 \ c_6)^T$, $(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 + \sigma_6)^T$ に変更した時, (a) で求めた最適解がそれぞれ変更した 6 つの問題でも最適解であり続けるための条件を求めよ；