

例 5.1

$$\begin{aligned}
 \text{(主問題)} \quad & \begin{cases} \text{minimize} & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases} \\
 \text{(双対問題)} \quad & \begin{cases} \text{maximize} & 2p_1 + p_2 + 2p_3 \\ \text{subject to} & p_1 - p_2 + p_3 = 1 \\ & p_1 - p_3 \leq 2 \\ & p_2 + 3p_3 \geq -1 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

5.3 双対定理

5.1 節では双対問題の目的関数 $g(\mathbf{p})$ が主問題の最適値の下界値になることを示したが、もっと一般的な結果も成り立つことをこれから紹介する。

定理 5.2 (弱双対定理)

$\mathbf{x}$ が主問題の実行可能解であり、 $\mathbf{p}$ が双対問題の実行可能解であるとする

$$\mathbf{b}^T \mathbf{p} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

が成り立つ。

証明： $\mathbf{x}$ が主問題の実行可能解であり、 $\mathbf{p}$ が双対問題の実行可能解であると仮定する。

すると、 $\forall j$ に対して、 x_j と $c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j$ の符号は同じ (x_j の符号が定まらない場合は $c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j = 0$) であるので $x_j(c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j) \geq 0$ が成り立つ。同様に $\forall i$ に対して、 p_i と $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i$ の符号は同じ (p_i の符号が定まらない場合は $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i = 0$) であるので $p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) \geq 0$ が成り立つ。

従って

$$0 \leq \sum_j x_j(c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j) + \sum_i p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) = \mathbf{x}^T(\mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{p}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{p}$$

系 5.1

(a) 主問題の最適値が $-\infty$ であれば、双対問題は実行不可能である。

(b) 双対問題の最適値が $+\infty$ であれば、主問題は実行不可能である。

証明： (a) 主問題の最適値が $-\infty$ で、双対問題に実行可能解 $\bar{\mathbf{p}}$ が存在すると仮定する。主問題の任意の実行可能解 $\mathbf{x}$ に対して、弱双対定理より $\mathbf{b}^T \bar{\mathbf{p}} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ が成り立つ。主問題の目的関数値が $-\infty$ へ発散するような実行可能解点列 $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ をとると、 $\mathbf{b}^T \bar{\mathbf{p}} \leq -\infty$ となるので矛盾が起こる。(b) についても同様にいえる。 ■

系 5.2 $\bar{\mathbf{x}}$ と $\bar{\mathbf{p}}$ をそれぞれ主問題と双対問題の実行可能解とし、 $\mathbf{b}^T \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$ が成り立つと仮定する。すると $\bar{\mathbf{x}}$ と $\bar{\mathbf{p}}$ はそれぞれ主問題と双対問題の最適解である。

証明： $\bar{\mathbf{x}}$ と $\bar{\mathbf{p}}$ が仮定を満たしているとする。主問題の任意の実行可能解 $\mathbf{x}$ に対して、弱双対定理より $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{p}} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ が成り立つので、 $\bar{\mathbf{x}}$ は主問題の最適解になる。同様なことが双対問題についてもいえる。 ■

定理 5.3（強双対定理）

線形計画問題（主問題）に最適解が存在するならば，双対問題にも最適解が存在し，それぞれの最適値は一致する．

証明： 説明を簡略化するために，まず標準形の線形計画問題について考える．

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

上記の問題に最適解 $\bar{\mathbf{x}}$ が存在し，ブランドのルールを用いたシンプレックス法でその最適解が求めたとする．

減少コストの終了条件より， $\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T$ が成り立つ．ただし， $\mathbf{B}$ は最適解での基底行列， $\mathbf{c}_B$ は該当する目的関数ベクトルの一部とする．ここで $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{B}^{-T} \mathbf{c}_B$ と定義すると， $\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ が成り立ち，双対問題

$$\begin{cases} \text{maximize} & \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{p}} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{p}} \leq \mathbf{c} \end{cases}$$

において $\bar{\mathbf{p}}$ は実行可能になる．

また， $\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$ が成り立つ．系 5.2 より $\bar{\mathbf{p}}$ は双対問題の最適解になり，その最適値は主問題の最適値と一致する．

一般の線形計画問題も同値な標準形の線形計画問題に変換できるので，同等な結果がいえる． ■

今までの議論から，LPには3つの可能性しかないことが分かる．

1. （実行可能解が存在し）最適解がある；
2. （実行可能解が存在し）最適値が $\pm\infty$ になる；
3. 実行可能解が存在しない．

主問題と双対問題に同時に実行可能解を持たない場合もある．

例 5.2

$$\begin{cases} \text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{maximize} & p_1 + 3p_2 \\ \text{subject to} & p_1 + 2p_2 = 1 \\ & p_1 + 2p_2 = 2 \end{cases}$$

従って，主問題と双対問題の関係をまとめると以下のような表を得ることができる．

		双対問題		
		最適解あり	最適解なし ($+\infty$)	実行可能解なし
主問題	最適解あり	可能	不可能	不可能
	最適解なし ($-\infty$)	不可能	不可能	可能
	実行可能解なし	不可能	可能	可能

5.4 相補性定理

主問題と双対問題の最適解の重要な関係が次の相補性条件（complementary slackness condition）によって導かれる．

定理 5.4 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{p}$ をそれぞれ主問題と双対問題の実行可能解とする.

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{p}$ がそれぞれ主問題と双対問題の最適解であるための必要十分条件は以下の通りである.

$$\begin{aligned} p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) &= 0, & \forall i \\ (c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j)x_j &= 0, & \forall j \end{aligned}$$

証明: (⇐) 任意の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{p}$ に対して,

$$\begin{aligned} u_i &= p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) \\ v_j &= (c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j)x_j \end{aligned}$$

と定義する.

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{p}$ がそれぞれの問題において実行可能解であると, 弱双対定理 5.2 の証明と同様に $u_i \geq 0, \forall i, v_j \geq 0, \forall j$ となり, さらに $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{p} = \sum_i u_i + \sum_j v_j$ が成り立つ. 強双対定理 5.3 より, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{p}$ が最適解であるならば, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{p}$ となるので $u_i = v_j = 0, \forall i, j$ が成立する.

(⇐) $u_i = v_j = 0, \forall i, j$ ならば $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{p}$ となるので系 5.2 より $\mathbf{x}$ と $\mathbf{p}$ は最適解である. ■

例 5.3 次の標準形の線形計画問題とその双対問題を考える.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{subject to} & 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & 8p_1 + 3p_2 \\ \text{subject to} & 5p_1 + 3p_2 \leq 13 \\ & p_1 + p_2 \leq 10 \\ & 3p_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

この問題において $n = 3, m = 2$ なので, $\mathbf{x}^* = (1, 0, 1)^T$ が主問題の最適解だとすると, それは退化していない. 相補性定理を用いて, $\mathbf{x}^*$ が主問題の最適解であり双対問題の最適解も計算する.

まず $\mathbf{x}^*$ が主問題において実行可能解であることは明らかであり, 等式制約だけがあるので $p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) = 0$ の条件は自動的に満たされている.

次に $(c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j)x_j = 0$ の条件を考えてみると, $x_2^* = 0$ であるので, $j = 2$ については満たされているが,

$$\begin{aligned} 5p_1 + 3p_2 &= 13 \\ 3p_1 &= 6 \end{aligned}$$

という連立 1 次方程式が導かれる. この唯一の解 $p_1^* = 2, p_2^* = 1$ は $p_1 + p_2 \leq 10$ の不等式も満たすので相補性定理より $\mathbf{x}^*$ は主問題の最適解, $(p_1^*, p_2^*) = (2, 1)$ は双対問題の最適解であることが分かる. さらに, 最適値が 19 であることも確認できる.

5.5 双対シンプレックス法 (dual simplex method)

強双対定理の証明で標準形の線形計画問題に対し, $\mathbf{p} = \mathbf{B}^{-T} \mathbf{c}_B$ として定義したら, 減少コストによる終了条件 $\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T$ はその双対問題の実行可能条件 $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ と同じであることが分かった.

つまりシンプレックス法は主問題の実行可能性を保ちながら双対問題の実行可能性を目指すアルゴリズムとしてとらえることができる. このようなアルゴリズムのことを主シンプレックス法と呼ぶ. これに対して双対問題の実行可能性を保ちながら主問題の実行可能性を目指すアルゴリズムを双対シンプレックス法と呼び, その詳細についてこれから紹介する.

今までの通り, 標準形の線形計画問題を考え, 行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ のランクが m だとする. そしてある基底行列 $\mathbf{B}$ が定まっているとする. タブローシンプレックス法で用いたタブローを再掲する.

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_B \\ z \end{array} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N \\ \hline \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N \end{array} \right\} \mathbf{x}_N \quad (8)$$

ここで $\mathbf{p} = \mathbf{B}^{-T}\mathbf{c}_B$ とおくと、以下のように書き換えることができる。

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_B \\ z \end{array} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_N \\ \hline \mathbf{p}^T\mathbf{b} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_N \end{array} \right\} \mathbf{x}_N$$

便宜上、上記の連立1次方程式を

$$\begin{array}{rcllclclclcl} x_{B(1)} & = & f_1 & + & g_{1,1}x_{N(1)} & + & \dots & + & g_{1,n-m}x_{N(n-m)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{B(m)} & = & f_m & + & g_{m,1}x_{N(1)} & + & \dots & + & g_{m,n-m}x_{N(n-m)} \\ \hline z & = & h & + & h_1x_{N(1)} & + & \dots & + & h_{n-m}x_{N(n-m)} \end{array} \quad (9)$$

と書き直す。

最初に述べたように減少コストベクトル $\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T\mathbf{B}^{-T}\mathbf{c}_B$ が非負ベクトルであると仮定する。さらに $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ が非負ベクトルであることを仮定していないので $x_{B(\ell)} < 0$ となるような添字 $\ell \in \{1, \dots, m\}$ を選ぶ。

タブローの ℓ 行目で全ての係数 $g_{\ell,i}$ $i = 1, \dots, n-m$ が非正であれば目的関数値を $+\infty$ として終了する。そうでなければ $g_{\ell,i} > 0$ となる $i = 1, \dots, n-m$ の中で $\frac{h_i}{g_{\ell,i}}$ が最小になるような添字 s を選択する。

最後に $\mathbf{A}_{B(\ell)}$ を基底から出し、 $\mathbf{A}_{N(s)}$ を基底に入れる。

双対シンプレックス法をタブロー形式でまとめると以下のようになる。

双対シンプレックス法の一反復

1. 減少コストベクトル $\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T\mathbf{B}^{-T}\mathbf{c}_B$ が非負ベクトルとなるような基底 $(B(1), \dots, B(m))$ を用意する。
2. $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ に相当する係数 $f_1, \dots, f_m$ が全て非負であれば $\mathbf{x}$ は最適解であり、終了する。
そうでなければ f_ℓ が負となる添字 $\ell \in \{1, \dots, m\}$ を選択する。 (*)
3. (9) の係数 $g_{\ell,i}$, $i = 1, \dots, n-m$ が全て非正であれば最適値は $+\infty$ となるので終了する。
4. もし正の要素があれば $\min_{\{i=1, \dots, n-m \mid g_{\ell,i} > 0\}} \frac{h_i}{g_{\ell,i}} \equiv \frac{h_s}{g_{\ell,s}}$ となる $s \in \{1, \dots, n-m\}$ を一つ選択する。 (**)
5. (9) において、 ℓ 行目以外の全ての行に ℓ 行の $-\frac{g_{i,s}}{g_{\ell,s}}$ 倍を足す。
 ℓ 行に対しては $\frac{1}{g_{\ell,s}}$ 倍し、変数 $x_{N(s)}$ を左項へ、 $x_{B(\ell)}$ を右項へ移行する。
添字 $B(\ell)$ と $N(s)$ を交換し、ステップ1へ。

例 5.4 次の線形計画問題

$$\begin{cases} \text{maximize} & 15p_1 + 20p_2 \\ \text{subject to} & 4p_1 + 6p_2 \leq 240 \\ & 2p_1 + p_2 \leq 90 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 100 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{cases}$$

とその双対問題

$$\begin{cases} \text{minimize} & 240x_1 + 90x_2 + 100x_3 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 15 \\ & 6x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

を考える.

スラック変数 x_4, x_5 を用いて以下のようなタブローを作成する.

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & -15 & + & 4x_1 & + & 2x_2^\dagger & + & x_3 \\ x_5 & = & -20 & + & 6x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ \hline z & = & 0 & + & 240x_1 & + & 90x_2 & + & 100x_3 \end{array}$$

この場合, 基底は $(B(1), B(2)) = (4, 5)$ で減少コストベクトル $(240, 90, 100)^T$ は非負ベクトルである.

$B^{-1}\mathbf{b}$ に相当する係数 f_1, f_2 が両方負であるが, $\ell = 1, B(1) = 4$ を選択する. 双対シンプレックス法のステップ 4 で $\min\{240/4, 90/2, 100/1\} = 45$ であるので, $s = 2, N(2) = 2$ を選択する. 要するに $\dagger$ を中心にピボット演算を行う.

$$\begin{array}{rclclcl} x_2 & = & \frac{15}{2} & - & 2x_1 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 & = & -\frac{25}{2} & + & 4x_1^\dagger & + & \frac{3}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\ \hline z & = & 675 & + & 60x_1 & + & 55x_3 & + & 45x_4 \end{array}$$

$B^{-1}\mathbf{b}$ に相当する係数 f_2 が負であるので, $\ell = 2, B(2) = 5$ を選択する. 双対シンプレックス法のステップ 4 で $\min\{60/4, 55/1.5, 45/0.5\} = 15$ であるので, $s = 1, N(1) = 1$ を選択する. 要するに $\dagger$ を中心にピボット演算を行う.

$$\begin{array}{rclclcl} x_2 & = & \frac{5}{4} & + & \frac{1}{4}x_3 & + & \frac{3}{4}x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\ x_1 & = & \frac{25}{8} & - & \frac{3}{8}x_3 & - & \frac{1}{8}x_4 & + & \frac{1}{4}x_5 \\ \hline z & = & \frac{1725}{2} & + & \frac{65}{2}x_3 & + & \frac{75}{2}x_4 & + & 15x_5 \end{array}$$

よって, $\mathbf{x} = (\frac{25}{8}, \frac{5}{4}, 0)^T$ が最適解であり, $\frac{1725}{2}$ が最適値である. さらに相補性定理を用いると最大化問題については $\mathbf{p} = (\frac{75}{2}, 15)^T$ が最適解であることが分かる.

5.6 主問題と双対問題のいずれを解くべきか

これまでの議論から分かるように, LP は, その問題を直接解かずにシンプレックス法をその双対問題に適用することにより解くことができる. 効率的に LP を解く上で, 主問題を解くのと, 双対問題を解くのと, どちらが簡単かを判別できると便利である.

しかしこの判別の問題についても, 非基底変数の選択規則の場合と同様, 理論的に答えることは難しい. 計算実験では, LP (の主問題) を解く場合, 総演算数は基底変数の数 m に強く依存し, 非基底変数の数 $n - m$ にはあまり影響を受けないことが示されている. つまり, m が n に比べて小さいときは主問題を解き, その逆の場合は双対問題を解くのが有利であることが予想される.

また, 主問題と双対問題のいずれを解くべきかを選ぶ基準は, m と n の大小関係によるものだけではない. 例えば, 主問題の初期タブローが実行可能でなく, 双対問題の初期タブローが実行可能である場合は, 主問題を解くためには 2 段階シンプレックス法の第 1 段階から始める必要がある. 双対問題では第 1 段階は不要になる. このことから推測されるように, 主問題・双対問題のいずれかが実行可能なタブローを持てば, m と n の大きさにあまり違いがない限り, その実行可能なタブローを持つ問題を解く方が有利である.

5.7 どのような時に双対シンプレックス法が活躍するか

上記の他に例えば (標準形の) 線形計画問題の最適値と最適解が求まっているとしよう. そして等式制約の右辺ベクトル $\mathbf{b}$ だけを $\bar{\mathbf{b}}$ に変更したいと仮定する. この場合, 最初からシンプレックス法を用いて解き直す必要はない. (8) から分かるように, $\mathbf{b}$ を $\bar{\mathbf{b}}$ で置き換えても, 減少コストベクトルは変更されないで, 双対問題の実行可能性は保たれるが基底変数 $\mathbf{x}_B$ の非負条件は壊れる. つまり双対シンプレックス法を適用することにより, 演算回数を大幅に省くことができる.

5.8 演習問題

演習問題 5.1 次の線形計画問題の双対問題を書け.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 3 \\ & -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

演習問題 5.2 次の線形計画問題の双対問題を書け.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{subject to} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

演習問題 5.3 標準形の線形計画問題の双対問題の双対問題が元の問題になることを示せ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

演習問題 5.4 この問題の主旨は線形計画問題を解くことが連立不等式を解くことよりも難しいことを示すことである.

任意の与えられた連立不等式に対して, その解を求め, 出力として解を返すか解を持たないことを答えてくれるアルゴリズム (サブルーチン) が存在すると仮定する. 上記のサブルーチンを一度だけ用いて最適解を持つ任意の線形計画問題の解を求め, その解を返してくれるような (簡単な) アルゴリズムを書け.

演習問題 5.5 $\mathbf{A}$ を対称行列とし, 以下の線形計画問題を考える

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

もし $\mathbf{x}^*$ が $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{c}$ および $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ を満たすならば, $\mathbf{x}^*$ が最適解であることを証明せよ.

演習問題 5.6 以下の線形計画問題を 2 段階シンプレックス法を用いて第 2 段階にて 3 反復行なえ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & -3x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -2x_1 + 7x_2 \leq 6 \\ & 9x_1 - 4x_2 \leq 6 \\ & -5x_1 + 2x_2 \leq -3 \\ & 7x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

ヒント: 双対問題を考えよ.

演習問題 5.7 以下の一般形の線形計画問題の双対問題の双対問題が元の問題になることを示せ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1 \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2 \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3 \\ & x_j \geq 0, \quad j \in N_1 \\ & x_j \leq 0, \quad j \in N_2 \\ & x_j \text{ 自由変数}, \quad j \in N_3 \end{array} \right.$$

演習問題 5.8 線形計画問題の主問題を次のように定義する.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

主問題の双対問題を作り, 同値な最小化問題を書け. 双対問題と主問題が全く同じ問題になるための行列 $\mathbf{A}$ およびベクトル $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ の条件を導き出せ. また, このような条件を満たすような線形計画問題を具体的に一つ示せ. このような線形計画問題は自己双対線形計画問題と呼ばれる.

演習問題 5.9 標準形の線形計画問題を考える.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

ラグランジュ関数を以下のように定義し,

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{p}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}),$$

次の「ゲーム」を考える: プレーヤ1はある $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ を選び, プレーヤ2はある $\mathbf{p}$ を選ぶ; プレーヤ1はプレーヤ2に $L(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ を支払う. プレーヤ1は $L(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ を最小化することを求め, 同時にプレーヤ2は $L(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ を最大化することを求め.

以下の条件を満たす $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$, $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ は均衡点 (もしくは鞍点, *Nash* (勿論 “*Beatiful Mind*”!)) の均衡) と呼ばれる.

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*) \leq L(\mathbf{x}, \mathbf{p}^*), \quad \forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{p}.$$

(つまり, 各プレーヤが自分の選択のみを変更して勝ち負けを変更出来ない状態が均衡である).

上記の $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件が $\mathbf{x}^*$ と $\mathbf{p}^*$ がそれぞれ主問題と双対問題の最適解であることを証明せよ.

演習問題 5.10 次の問題の双対問題を書き, 与えられた解の最適性を調べよ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{subject to} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

- 主問題 : $x_1 = 0, x_2 = 2/3, x_3 = 2/3$
- 双対問題 : $y_1 = 1/3, y_2 = 1/3$

演習問題 5.11 次のLPの最適解が以下のように与えられている。相補性定理を使って双対問題の最適解を求めよ。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- 最適解 : $x_1 = 4, x_2 = 8$

演習問題 5.12 次の最適なタブローから双対問題の最適解を求めよ。

$$\begin{array}{rcllclcl} & x_4 & = & 39 & + & 9.75x_1 & - & 3.25x_5 & + & 0.25x_6 \\ \text{(a)} & x_3 & = & 3.5 & + & 0.625x_1 & - & 0.375x_5 & - & 0.125x_6 \\ & x_2 & = & 4 & + & 0.75x_1 & - & 0.25x_5 & + & 0.25x_6 \\ \hline & z & = & -9 & + & 0.5x_1 & + & 1.5x_5 & + & 1.5x_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcllclclcl} & x_2 & = & 6 & - & x_1 & - & 2x_4 & & - & 0.5x_6 \\ \text{(b)} & x_3 & = & 0.4 & - & 0.2x_1 & + & 0.2x_4 & - & 0.2x_5 & + & 0.1x_6 \\ & x_7 & = & 11.2 & - & 1.6x_1 & + & 1.6x_4 & + & 0.4x_5 & + & 0.3x_6 \\ \hline & z & = & -12.4 & + & 1.2x_1 & + & 2.8x_4 & + & 0.2x_5 & + & 0.9x_6 \end{array}$$

演習問題 5.13 次のLPの最適解をその双対問題を解くことにより求めよ。また、主問題のタブローを使って双対問題にシンプレックス法を適用する方法（双対シンプレックス法）をこの例で説明せよ。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & -2x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & -2x_1 - 4x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & -2x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

演習問題 5.14 この問題の目的は双対問題を標準形の線形計画問題として定式化し（主）シンプレックス法を適用すると、元問題に双対シンプレックス法を適用することと異なることを示すことである。次の標準形の線形計画問題とその双対問題を考える。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & x_1 = 1 \\ & x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & p_1 + p_2 \\ \text{subject to} & p_1 \leq 1 \\ & p_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

主問題に対しては基底行列の候補は一つであり，双対シンプレックス法を用いても直ちに終了することになる．そこで双対問題を標準形の線形計画問題に定式化し，(主)シンプレックス法を用いると何反復かは必要であることを示せ．