改訂シンプレックス法の一反復

1. 基底列 $\boldsymbol{A}_{B(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{B(m)}$，基底実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と基底の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を用意する．

2. $\boldsymbol{p}^T = \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \in \mathbb{R}^m$ をあらかじめ計算しておいて，非基底変数に相当する添字 $\forall j$ に対して減少コスト $\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}_j$ を計算する．

   全てが非負であれば $\boldsymbol{x}$ は最適解であり，終了する．

   そうでなければ $\bar{c}_j < 0$ となる j を選択する． （＊）

3. $\boldsymbol{d}_B = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j \in \mathbb{R}^m$ を計算する．全ての要素が非負であれば $\theta^* = \infty$ となるので最適値は $-\infty$ となり終了する．

4. もし負の要素があれば

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right)$$

   を計算し，$\theta^* = -\frac{x_{B(\ell)}}{d_{B(\ell)}}$ となる $B(\ell)$ を選択する． （＊＊）

5. $[\boldsymbol{B}^{-1} \ -\boldsymbol{d}_B] \in \mathbb{R}^{m\times(m+1)}$ を用意する．各行に ℓ 行の定数倍を加え，最後の列が $\boldsymbol{e}_\ell \in \mathbb{R}^m$ となるようにする．最初の m 列が新しい基底行列の逆行列 $\bar{\boldsymbol{B}}^{-1}$ となり，新しい基底実行可能解として $y_j = \theta^*,\ y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta^* \boldsymbol{d}_{B(i)},\ \forall i = 1, \ldots, m,\ i \neq \ell$ を用い，ステップ 1 へ．

改訂シンプレックス法で説明が必要なところは最後のステップ 5 のみである．「各行に ℓ 行の定数倍を加える」操作は $[\boldsymbol{B}^{-1} \ -\boldsymbol{d}_B]$ 行列に以下のように定義された行列 $\boldsymbol{C}$ を左側からかけることに相当する．

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & & & -\frac{d_{B(1)}}{d_{B(\ell)}} & & \\ & 1 & & -\frac{d_{B(2)}}{d_{B(\ell)}} & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & -\frac{1}{d_{B(\ell)}} & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & -\frac{d_{B(m)}}{d_{B(\ell)}} & & 1 \end{pmatrix}$$

すると，

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{B}^{-1} \ -\boldsymbol{d}_B] = [\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \ \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j] = [\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \ \boldsymbol{e}_\ell]$$

が得られる．$\bar{\boldsymbol{B}}^{-1} \equiv \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$ と定義すると，

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j &= \boldsymbol{e}_\ell \\ \bar{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{B(i)} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_{B(i)} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, \ldots, m,\ i \neq \ell \end{aligned}$$

となるので，$\bar{\boldsymbol{B}}^{-1}$ は上記のステップ 5 で用いるべき新しい基底行列の逆行列となっている．よって，改訂シンプレックス法はシンプレックス法と同じ結果を計算していることになる．

4.4 タブローシンプレックス法（tableau simplex method）

最後にアルゴリズムの手順がシンプルなシンプレックス法を紹介する．

今までの話に沿って $\boldsymbol{B}$ を基底行列，$\boldsymbol{x}$ を基底実行可能解とする．$\boldsymbol{x}$ は実行可能解であるので

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \sum_{j=1,\ j\neq B(1),\ldots,B(m)}^{n} \boldsymbol{A}_j x_j = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N \boldsymbol{x}_N$$

として特に非基底変数 $\boldsymbol{x}_N$ に相当する $\boldsymbol{A}$ 行列の列を $\boldsymbol{A}_N$ と表記する．従って

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N$$

となる．同様に目的関数についても考えると

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N$$

と分解できるので，結局

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^T(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T\boldsymbol{B}^{-T}\boldsymbol{c}_B)^T\boldsymbol{x}_N$$

が得られる．

これらの情報を表にまとめると以下のようになる．

$$\begin{array}{rcc} & & \boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_B = & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_N \\ \hline z = & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_N \\ \hline \end{array}$$

便宜上，上記の連立 1 次方程式を

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{B(1)} & = & f_1 & + & g_{1,1}x_{N(1)} & + & \dots & + & g_{1,n-m}x_{N(n-m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{B(m)} & = & f_m & + & g_{m,1}x_{N(1)} & + & \dots & + & g_{m,n-m}x_{N(n-m)} \\ \hline z & = & h & + & h_1x_{N(1)} & + & \dots & + & h_{n-m}x_{N(n-m)} \end{array} \tag{6}$$

と書き直す．

<u>タブローシンプレックス法の一反復</u>

1. 基底 $(B(1),\dots,B(m))$ と基底実行可能解 $\boldsymbol{x}$ を用意する．
2. 非基底変数に相当する添字 $(N(1),\dots,N(n-m))$ に対する減少コスト $h_1,\dots,h_{n-m}$ が全て非負であれば $\boldsymbol{x}$ は最適解であり，終了する．
   そうでなければ h_s が負となる添字 $s \in \{1,\dots,n-m\}$ を選択する． （＊）
3. (6) の係数 g_{is}，$i = 1,\dots,m$ が全て非負であれば最適値は $-\infty$ となるので終了する．
4. もし負の要素があれば $\displaystyle\min_{\{i=1,\dots,m \mid g_{i,s}<0\}} -\frac{f_i}{g_{i,s}} \equiv -\frac{f_\ell}{g_{\ell,s}}$ となる $\ell \in \{1,\dots,m\}$ を一つ選択する．
   （＊＊）
5. (6) において，ℓ 行目以外の全ての行に ℓ 行の $-\frac{g_{i,s}}{g_{\ell,s}}$ 倍を足す．
   ℓ 行に対しては $\frac{1}{g_{\ell,s}}$ 倍し，変数 $x_{N(s)}$ を左項へ，$x_{B(\ell)}$ を右項へ移行する．
   添字 $B(\ell)$ と $N(s)$ を交換し，ステップ 1 へ．

例 4.1

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} \text{maximize} & & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \\ \text{subject to} & - & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \le -4 \\ & - & 2x_1 & & & - & 2x_3 & \le -3 \\ & - & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \le -2 \\ & & \multicolumn{5}{l}{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0} & \end{array}\right.$$

に対して２段階シンプレックス法の枠組のなかでタブローシンプレックス法をみていく．

この問題は次の問題と等価である．

$$
\left\{
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
\text{minimize} & - & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & & & & & & & \\
\text{subject to} & + & 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & & & & = & 4 \\
 & + & 2x_1 & & & + & 2x_3 & & & - & x_5 & & & & = & 3 \\
 & + & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & & & - & x_6 & & = & 2 \\
 & & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0, & & x_4 \geq 0, & & x_5 \geq 0, & & x_6 \geq 0 & & &
\end{array}
\right.
$$

つまり次の補助問題を解いて，初期の基底実行可能解を求めることができる．

$$
\left\{
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr

z_y 行にて x_4 の係数が $-\frac{1}{2}$ であるので $s=3$（$N(3)=4_x$）を選択．ステップ４での唯一の候補は $\ell=3$（$B(3)=3_y$）なのでこれを選択．要するに † を中心にピボット演算を行う．

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
x_5 & = & 1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_6 & & & + & y_2 & - & 2y_3 \\
x_1 & = & 2 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_6 & & & & & - & y_3 \\
x_4 & = & 0 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_6 & + & y_1 & & & - & 2y_3 \\
\hline
(z & = & -2 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_6 & & & & & + & y_3) \\
z_y & = & 0 & & & & & & & + & y_1 & + & y_2 & + & y_3
\end{array}
$$

補助問題の最適値が 0 となり，全ての人工変数が基底に入っていないので，それらを削除した問題を考える．

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_5 & = & 1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_6 \\
x_1 & = & 2 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_6 \\
x_4 & = & 0 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_6 \\
\hline
z & = & -2 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_6
\end{array}
$$

z 行にて x_2 の係数と x_6 の係数が負であるが，$s=1$（$N(1)=2_x$）を選択．ステップ４において該当する係数は全て正であるので，この問題の最適値は $-\infty$ となり，終了．

4.5　計算上の考察

最後にシンプレックス法の実用的計算機プログラムを書く際の問題点について考える．これらは大きく分けて２つの問題：

1. どのようにシンプレックス法の総演算回数を少なくおさえるか；
2. 計算機で行う有限桁数での演算においてどのように最終的な最適解および最適値の計算誤差を少なくするか；

を含んでいる．

後者については大規模なＬＰにおいて発生する問題なので，講義では特に触れないことにする．

4.5.1　基底に入る非基底変数の選択規則

一般にシンプレックス法では，次反復の基底に入る非基底変数の選択に多くの自由度がある．そして，実際にＬＰをシンプレックス法で解く場合，その選択の仕方がアルゴリズムが終了するまでにかかる総演算回数（計算時間）に強く影響をおよぼすことが知られている．

最も良く知られた基底に入る非基底変数の選択規則は Dantzig によって提案された**最小係数規則（smallest coefficient rule）**です．

最小係数規則：　シンプレックス法のステップ２（＊）において，減少コストが負（$\bar{c}_j < 0$）となる添字 j が複数個あれば，その中で係数 $\bar{c}_j$ が最も小さいものを選ぶ．

言い換えれば，最小係数規則は対応する非基底変数が１単位増加したときに目的関数の増加が最も小さくなるように非基底変数を選択している．その意味で，ごく自然な選択規則ということができる．しかし，この選択法を用いた場合，実際に得られる目的関数の減少は最小になるとは限らない．１反復で得られる目的関数値の減少を最大にするには，次の**最大改善規則（largest improvement rule）**が必要である．

最大改善規則： シンプレックス法のステップ２（＊）において，減少コストが負（$\bar{c}_j < 0$）となる添字 j が複数個あれば，その中で $\theta_j^* \bar{c}_j$ が最も小さいものを選ぶ．ここで，

$$\theta_j^* = \min\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}^{(j)}} \mid d_{B(i)}^{(j)} < 0,\ i = 1, \ldots, m\}, \qquad \boldsymbol{d}_B^{(j)} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j$$

その他にも幾つかの規則が提案されているが，残念ながら，基底に入る非基底変数の選択規則の善し悪しを理論的に結論づけることは大変困難である．そのため，計算実験による非基底変数の選択規則の性能比較が現在まで少なからずされてきている．

4.5.2 基底から出る基底変数の選択規則

シンプレックス法のステップ４にて，

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right) = -\frac{x_{B(\ell)}}{d_{B(\ell)}}$$

となる複数の添字候補 ℓ が存在すれば，例えばブランドのルールを用いれば良い．

4.6 演習問題

演習問題 4.1 以下の線形計画問題において

$$\left\{\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrl}
\text{minimize} & & - & 4x_2 & - & 1/2x_3 & + & 33x_4 & + & 3x_5 & + & 3x_7 & & & \\
\text{subject to} & 1/4x_1 & - & 8x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & + & x_5 & & & & = & 0, \\
 & 1/2x_1 & - & 12x_2 & - & 1/2x_3 & + & 3x_4 & & & + & x_6 & & = & 0, \\
 & & & & & x_3 & & & & & & & + \ x_7 & = & 1, \\
 & x_1, \ldots, x_7 \geq 0 & & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right.$$

基底 $B = (5, 6, 7)$ より出発して，改訂シンプレックス法および次の添字選択を用いて３反復行なえ．

(a) ステップ２において，減少コスト $\bar{c}_j$ (< 0) が最小となるものを j として選択せよ．

(b) ステップ５において，$\theta^* = -\frac{x_{B(\ell)}}{d_{B(\ell)}}$ となる最小の添字 $B(\ell)$ を選択せよ．

演習問題 4.2 ある油精製工場において，今月の生産に使われる原油 A が *800* 万バレルと原油 B が *500* 万バレルあるとする．これらの原油からはバレル当たり *$38* で売れるガソリンもしくはバレル当たり *$33* で売れる軽油を精製することができる．生産の詳細は次の表の通りである．

	プロセス *1*	プロセス *2*	プロセス *3*
原油 A	*3*	*1*	*5*
原油 B	*5*	*1*	*3*
ガソリン	*4*	*1*	*3*
軽油	*3*	*1*	*4*
生産コスト	*$51*	*$11*	*$40*

単位はバレル当たりであり，例えば，プロセス *1* では原油 A を *3* バレル，原油 B を *5* バレル用いて，ガソリンを *4* バレルと軽油 *3* バレルを生産コスト *$51* で精製することができる．今月の利益を最大にするにはどのような生産プランをたてれば良いか．線形計画問題として定式化し，２段階シンプレックス法を用いて解け．

演習問題 4.3 問題 *4.1* において，同じ初期基底から出発してブランドのルールを用いて線形計画問題の最適解を求めよ．

演習問題 4.4 実行可能解が有界 *(*集合*)* であるような標準形の線形計画問題を考える．また，任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ において各要素 x_i はスカラー U で上からおさえられているとする *(*$x_i \leq U$*).* このような時，この問題を $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ の制約を含む同値な線形計画問題に定式化できることを示せ．

演習問題 4.5 問題 *4.2* において，スポット取り引きにより，原油 B をバレル当たり *$40* で量に制限無く買うことができるとすると，今月は何バレル買えば良いか*?*

演習問題 4.6

$$\left\{\begin{array}{lrrrrrrrrrl} \text{minimize} & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & - & 4x_4 & & \\ \text{subject to} & & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5, \\ & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3, \\ & & \multicolumn{8}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0} & & \end{array}\right.$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 0, 0, 0)^T$ に相当する基底実行可能解から出発して改訂シンプレックス法で解け．

演習問題 4.7 次の線形計画問題を２段階シンプレックス法を用いて解け．

$$\left\{\begin{array}{lrrrrrrrrrrl} \text{minimize} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & \\ \text{subject to} & & x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & + & x_5 & = 2, \\ & & x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & = 2, \\ & - & x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & & & & & = 1, \\ & & \multicolumn{9}{c}{x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0} & \end{array}\right.$$

演習問題 4.8 $\boldsymbol{x}$ を基底行列 $\boldsymbol{B}$ と関連する基底実行可能解とする．以下を証明せよ．

(a) もしすべての非基底変数の減少コストが正であるならば，$\boldsymbol{x}$ は唯一の最適解である．

(b) もし $\boldsymbol{x}$ が唯一の最適解で非退化であるならば，全ての非基底変数の減少コストは正である．

演習問題 4.9 *4.1* 節の例にブランドのルールを適用して，シンプレックス法が有限回で終了することを確かめよ．

演習問題 4.10 問題 *4.6* をタブローシンプレックス法を用いて解け．

演習問題 4.11 *4.1* 節の例をタブローシンプレックス法を用いて解け．

5　線形計画問題の双対理論

5.1　動機

標準形の線形計画問題について考える．

$$（主問題）\left\{\begin{array}{ll}\text{minimize} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\end{array}\right.$$

ただし，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$ とする．

上記の問題に対して，最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が存在すると仮定する．

各等式制約にベクトル $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^m$ の要素をかけて，目的関数に加えた次の**緩和問題（relaxed problem）**を考える．

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{minimize} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\end{array}\right.$$

緩和問題の最適値 $g(\boldsymbol{p})$ は主問題の最適値よりも必ず小さい：

$$g(\boldsymbol{p})=\min_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}}\left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\right]\leq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$$

つまり，任意の $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^m$ に対して，$g(\boldsymbol{p})$ は主問題の最適値の下界値になっている．

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{maximize} & g(\boldsymbol{p}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^m\end{array}\right. \tag{7}$$

は主問題に対して最大の下界値をもたらす問題として見ることができ，**双対問題（dual problem）**と呼ばれている．

$g(\boldsymbol{p})$ の定義より，

$$g(\boldsymbol{p})=\min_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}}\left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\right]=\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{b}+\min_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{c}^T-\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

となり，

$$\min_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{c}^T-\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\left\{\begin{array}{ll}0, & \text{もし } \boldsymbol{c}^T-\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\geq\boldsymbol{0}^T \text{ ならば} \\ -\infty, & \text{それ以外}\end{array}\right.$$

なので $g(\boldsymbol{p})$ が最大になるのは (7) において $-\infty$ 以外の値をとる時を考えれば良いので，(7) は以下の問題と同値である

$$（双対問題）\left\{\begin{array}{ll}\text{maximize} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{p} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{c}\end{array}\right.$$

同様に次のような（標準形の線形計画問題でない）主問題に対して，双対問題を考える．

$$（主問題）\left\{\begin{array}{ll}\text{minimize} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\end{array}\right.$$

上記の問題に対して，最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が存在すると仮定する．そして

$$g(\boldsymbol{p})=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\right]\leq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$$

が成立することを望むとしよう．

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}$ より，もし $\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{0}$ であれば，

$$g(\boldsymbol{p}) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\right] \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$$

が成立する．一方

$$g(\boldsymbol{p}) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\right] = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{b} + \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

より，

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \begin{cases} 0, & \text{もし } \boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}^T \text{ ならば} \\ -\infty, & \text{それ以外} \end{cases}$$

がいえるので，上記の主問題に対して，双対問題は次のように定めればよいことになる．

$$(\text{双対問題})\begin{cases} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{p} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

5.2 双対問題

以下では行列 $\boldsymbol{A}$ の行を $\boldsymbol{a}_i^T$，列を $\boldsymbol{A}_j$ と記述する．一般に左側の主問題に対してその双対問題を右側に定義する．

$$(\text{主問題})\begin{cases} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geq b_i, & i \in M_1 \\ & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i, & i \in M_2 \\ & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i, & i \in M_3 \\ & x_j \geq 0, & j \in N_1 \\ & x_j \leq 0, & j \in N_2 \\ & x_j\text{は自由変数}, & j \in N_3 \end{cases} \qquad (\text{双対問題})\begin{cases} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{p} & \\ \text{subject to} & p_i \geq 0, & i \in M_1 \\ & p_i \leq 0, & i \in M_2 \\ & p_i\text{は自由変数}, & i \in M_3 \\ & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}_j \leq c_j, & j \in N_1 \\ & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}_j \geq c_j, & j \in N_2 \\ & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}_j = c_j, & j \in N_3 \end{cases}$$

要約すると次の表が得られる．

主問題	minimize	maximize	双対問題
制約式	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 自由	変数
変数	≥ 0 ≤ 0 自由	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	制約式

定理 5.1 双対問題を同値な最小化問題に変換し，変換した問題の双対問題を求めると元の（主）問題が得られる．

証明： 演習問題より類推できる． ∎

つまり「**双対問題の双対は主問題**」である．