

目的関数を減らすことができる。

つまり、 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \theta \mathbf{d}$ へ移動するが、前節の議論より x_j を $0 \rightarrow \theta$ に持っていき、それ以外の非基底変数を 0 に保つ。この操作を特に x_j を基底に入れるという。

以下、一番良い θ を求めることを考える。つまり、 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \theta \mathbf{d}$ より目的関数値は $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \theta \bar{c}_j$ になることを踏まえるとなるべく θ の値が大きい方が望ましい。

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid \mathbf{x} + \theta \mathbf{d} \in P\}$$

とおくと、

(a) $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ であれば、 $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, $\forall \theta \geq 0$ となるので、 $\theta^* = \infty$ ととれる。

(b) $d_i < 0$ となるような $i \in \{1, \dots, n\}$ が存在すれば、 $x_i + \theta d_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ を満たすためには

$$\theta^* = \min_{\{i \mid d_i < 0\}} \left(-\frac{x_i}{d_i} \right)$$

となるが、非基底変数に対応する $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ の要素は 0 もしくは 1 になる。よって基底変数に対応する実行可能方向の添字のみを考えればよいことになる。

$$\theta^* = \min_{\{i=1, \dots, m \mid d_{B(i)} < 0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right) \equiv -\frac{x_{B(\ell)}}{d_{B(\ell)}}.$$

ここで $\ell \in \{1, \dots, m\}$ は θ の最小値 θ^* を実現する添字である。基底実行可能解 $\mathbf{x}$ の非退化の仮定 よりここでは必ず $x_{B(i)} > 0$, $\forall i = 1, \dots, m$ となるので $\theta^* > 0$ となる。

新しく移動した先を $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d}$ とおくと、 $x_j = 0$ であったが、 $y_j = \theta^*$ となる。また $x_{B(\ell)} > 0$ であったが $y_{B(\ell)} = 0$ となり、 $x_{B(\ell)}$ は基底から出たという。

同時に基底において $\mathbf{A}_{B(\ell)}$ を $\mathbf{A}_j$ で置き換えるのが自然であるので、

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_{B(1)} \cdots \mathbf{A}_{B(\ell-1)} \mathbf{A}_{B(\ell)} \mathbf{A}_{B(\ell+1)} \cdots \mathbf{A}_{B(m)}) \rightarrow \bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{A}_{B(1)} \cdots \mathbf{A}_{B(\ell-1)} \mathbf{A}_j \mathbf{A}_{B(\ell+1)} \cdots \mathbf{A}_{B(m)})$$

とする。そして添字集合も

$$\{B(1), \dots, B(m)\} \rightarrow \{\bar{B}(1), \dots, \bar{B}(m)\}$$

$$\bar{B}(i) = \begin{cases} B(i), & i \neq \ell \\ j, & i = \ell \end{cases}$$

とする。

定理 3.2

(a) 列集合 $\{\mathbf{A}_{B(i)} \mid i = 1, \dots, m, i \neq \ell\}$ と $\mathbf{A}_j$ は線形独立である。つまり、 $\bar{\mathbf{B}}$ は基底行列である。

(b) $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d}$ は基底実行可能解であり、 $\bar{\mathbf{B}}$ によって求まる。

証明： (a) 背理法より、もし $\{\mathbf{A}_{\bar{B}(i)} \mid i = 1, \dots, m\}$ が線形従属であれば全てが零でない $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ が存在し、

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_{\bar{B}(i)} = \mathbf{0}$$

となり、 B の正則性より

$$\Leftrightarrow \mathbf{0} = \sum_{i=1}^m \lambda_i B^{-1} \mathbf{A}_{\bar{B}(i)} = \sum_{i=1, i \neq \ell}^m \lambda_i \mathbf{e}_i + \lambda_\ell B^{-1} \mathbf{A}_j$$

が得られる。ただし、上記は $BB^{-1} = \mathbf{I}$, $B^{-1} \mathbf{A}_{B(i)} = \mathbf{e}_i$, $i \neq \ell$ からいえる。しかし、 $d_{B(\ell)} = [-B^{-1} \mathbf{A}_j]_\ell < 0$ であるので、 $\{\mathbf{e}_i \mid i = 1, \dots, m, i \neq \ell\}$ と $B^{-1} \mathbf{A}_j$ は線形独立であるので矛盾が起こる。

(b) $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $y_i = 0, \forall i \neq \bar{B}(1), \dots, \bar{B}(m)$ であり、 $\{\mathbf{A}_{\bar{B}(1)}, \dots, \mathbf{A}_{\bar{B}(m)}\}$ は線形独立なので定理 2.4 より $\mathbf{y}$ は基底実行可能解である。 ■

シンプレックス法の一反復

1. 基底列 $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$ と基底実行可能解 $\mathbf{x}$ を用意する。
2. 非基底変数に相当する添字 $\forall j$ に対して減少コスト $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{A}_j$ を計算する。
全てが非負であれば $\mathbf{x}$ は最適解であり、終了する。
そうでなければ $\bar{c}_j < 0$ となる j を選択する。 (*)
3. $\mathbf{d}_B = -B^{-1} \mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^m$ を計算する。全ての要素が非負であれば $\theta^* = \infty$ となるので最適値は $-\infty$ となり終了する。
4. もし負の要素があれば

$$\theta^* = \min_{\{i=1, \dots, m \mid d_{B(i)} < 0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right)$$

を計算し、 $\theta^* = -\frac{x_{B(\ell)}}{d_{B(\ell)}}$ となる $B(\ell)$ を選択する。 (**)

5. 基底列において $\mathbf{A}_{B(\ell)}$ の代わりに $\mathbf{A}_j$ を入れ、新しい基底実行可能解として $y_j = \theta^*$, $y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta^* d_{B(i)}$, $\forall i = 1, \dots, m, i \neq \ell$ を用い、ステップ 1 へ。

定理 3.3 線形計画問題の実行可能領域が非空で、全ての基底実行可能解が非退化であると仮定する。シンプレックス法は有限回の反復で終了し、次の2つ可能性が起こりうる。

- (a) 有限な最低値および最適解が得られる。
- (b) 最適値が $-\infty$ になる。

証明： 定理 3.1 より、ステップ 2 でシンプレックス法が終了すると (a) が得られる。

また、ステップ 3 で終了すれば、今までの議論から (b) が得られることが分かる。

最後に、全ての基底実行可能解において非退化であるので、必ず $\theta^* > 0$ となり、反復を重ねるごとに目的関数値は $\theta^* \bar{c}_j < 0$ 下がる ($\bar{c}_j < 0$ であることに注意)。よって、同じ基底実行可能解が2度生成されることがないので、このアルゴリズムは有限回で終了する。 ■

例 3.2 先ほどの例 3.1 においてシンプレックス法を適用してみることにする。

1-1 $(B(1), B(2), B(3)) = (4, 5, 6)$, $B = \mathbf{I}$, $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 6, 4, 1)^T$ とする。

1-2 $\bar{c}_1 = -2 - (0, 0, 0) \mathbf{I}(2, 2, -4)^T = -2$, $\bar{c}_2 = -1 - (0, 0, 0) \mathbf{I}(2, 0, 3)^T = -1$, $\bar{c}_3 = -1 - (0, 0, 0) \mathbf{I}(-1, 4, -1)^T = -1$ となるが $j = 1$ を選択する。

1-3 $\mathbf{d}_B = -\mathbf{I}^{-1}(2, 2, -4)^T = (-2, -2, 4)^T$

1-4 $\theta^* = \min\{-\frac{6}{-2}, -\frac{4}{-2}\} = 2$ となるので $B(\ell) = 5$ を選択する。

1-5 $(B(1), B(2), B(3)) = (4, 1, 6)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ より
 $\mathbf{x} = (2, 0, 0, 2, 0, 9)^T$ となる.

2-2 $\bar{c}_2 = -1 - (0, -2, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} (2, 0, 3)^T = -1$,

$\bar{c}_3 = -1 - (0, -2, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} (-1, 4, -1)^T = 3$, $\bar{c}_5 = 0 - (0, -2, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} (0, 1, 0)^T =$
1 となるので $j = 2$ を選択する.

2-3 $d_B = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} (2, 0, 3)^T = (-2, 0, -3)^T$

2-4 $\theta^* = \min\{-\frac{2}{-2}, -\frac{9}{-3}\} = 1$ となるので $B(\ell) = 4$ を選択する.

2-5 $(B(1), B(2), B(3)) = (2, 1, 6)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ より
 $\mathbf{x} = (2, 1, 0, 0, 0, 6)^T$ となる.

3-2 $\bar{c}_3 = -1 - (-1, -2, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} (-1, 4, -1)^T = \frac{1}{2}$, $\bar{c}_4 = 0 - (-1, -2, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} (1, 0, 0)^T =$
 $\frac{1}{2}$, $\bar{c}_5 = 0 - (-1, -2, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} (0, 1, 0)^T = \frac{1}{2}$ となるので, $\mathbf{x} = (2, 1, 0, 0, 0, 6)^T$ が最
適解であり, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = -5$ が最適値である.

3.4 演習問題

演習問題 3.1 次の線形計画問題において

$$\begin{cases} \text{minimize} & -2x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & x_1 - x_2 \leq 2, \\ & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) 標準形の線形計画問題に変換せよ.

(b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ となる基底実行可能解および基底行列を求めよ.

(c) 上記の基底実行可能解から出発して単体法を一反復行なえ.

演習問題 3.2 次の標準形の多面体 $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ を定義する. $\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T$ においてノルムが丁度 1 となる実行可能方向をすべて求めよ.

演習問題 3.3 多面体 P 上で目的関数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ を最小化する線形計画問題を考える. 以下を証明せよ.

- (a) 実行可能解 $\mathbf{x}$ が最適解であるための必要十分条件は任意の実行可能方向 $\mathbf{d}$ に対して $\mathbf{c}^T \mathbf{d} \geq 0$ が成り立つ時である.
- (b) 実行可能解 $\mathbf{x}$ が唯一の最適解であるための必要十分条件は $\mathbf{x}$ における任意の実行可能方向 $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ が $\mathbf{c}^T \mathbf{d} > 0$ を満たすときである.

演習問題 3.4 (a) 上記の問題 3.1 にシンプレックス法を用いて最適値および最適解を求めよ.

(b) 上記の問題 3.1 の定式化から図を用いて線形計画問題を解け.

演習問題 3.5 次の線形計画問題

$$\begin{cases} \text{minimize} & -2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 4x_4 \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

を $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 0, 0, 0)^T$ に相当する基底実行可能解から出発してシンプレックス法を用いて解け.

演習問題 3.6 $\mathbf{x}$ を標準形の多面体 $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ に属するベクトルとする. $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbf{x}$ において実行可能方向であるための必要十分条件は $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ および $x_i = 0$ となるような i に対して $d_i \geq 0$ であることを示せ.

演習問題 3.7 1 制約の線形計画問題を定義する.

$$\begin{cases} \text{minimize} & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^n a_i x_i = b, \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

(a) この問題が実行可能領域を持つかどうかを簡単に確認できる方法を考えよ.

(b) この問題が有限な最適値を持つと仮定して, 最適解を求めるシンプルな方法を考えよ.

演習問題 3.8 ある標準形の多面体 P の基底実行可能解 $\mathbf{x}$ が退化しているような例題を一つあげよ. 但し, 退化の定義を用いて $\mathbf{x}$ が退化していることを示せ.

演習問題 3.9 次の線形計画問題をまず標準形の線型計画問題に変換してからシンプレックス法を用いて解け (つまり最適解および最適値を求めよ).

$$\begin{cases} \text{maximize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

演習問題 3.10 次の線形計画問題をまず標準形の線型計画問題に変換してからシンプレックス法を用いて解け（つまり最適解および最適値を求めよ）。

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{maximize} & 2x_1 & + \quad 2x_2 \\ \text{subject to} & -3x_1 & + \quad x_2 \leq 1 \\ & x_1 & - \quad x_2 \leq 2 \\ & -x_1 & - \quad x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

4 線形計画問題に対するシンプレックス法（単体法） — 技術的な側面

前節ではシンプレックスアルゴリズムの基本的な計算法を紹介したが、実際、任意の線形計画問題を解くにはさらに2つの課題が残されている。

- (a) 基底実行可能解が退化している線形計画問題に対する処理。
 (b) シンプレックス法を始める時に必要な初期の基底実行可能解の求め方。

よってそれらの克服方法をこれから紹介する。

4.1 退化した問題およびブランドのルール

まず実際に退化した基底実行可能解が存在する線形計画問題に対して、シンプレックス法を用いると無限ループに陥ることを見ましょう。

$$\begin{cases} \text{maximize} & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{subject to} & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\ & -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

を標準形の線形計画問題に変換すると

$$\begin{cases} \text{minimize} & -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{subject to} & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ & -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

となる。

1-1 まず自明な基底実行可能解を $(B(1), B(2), B(3)) = (4, 5, 6)$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ として $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ を求める。明らかにこの基底実行可能解は退化している（定義 2.11）。

1-2 $\bar{c}_1 = -1 - (0, 0, 0)\mathbf{I}(2, 3, -5)^T = -1$, $\bar{c}_2 = 2 - (0, 0, 0)\mathbf{I}(-1, 1, 3)^T = 2$, $\bar{c}_3 = -1 - (0, 0, 0)\mathbf{I}(1, 1, -2)^T = -1$ となるが $j = 1$ を選択する。

1-3 $\mathbf{d}_B = -\mathbf{I}^{-1}(2, 3, -5)^T = (-2, -3, 5)^T$

1-4 $\theta^* = \min\{-\frac{0}{-2}, -\frac{0}{-3}\} = 0$ となるのが $B(\ell) = 5$ を選択する。

1-5 $(B(1), B(2), B(3)) = (4, 1, 6)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ より $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ となり、基底実行可能解が全く変化しないことがわかる。

2-2 $\bar{c}_2 = 2 - (0, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} (-1, 1, 3)^T = \frac{7}{3}$, $\bar{c}_3 = -1 - (0, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} (1, 1, -2)^T = -\frac{2}{3}$, $\bar{c}_5 = 0 - (0, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} (0, 1, 0)^T = \frac{1}{3}$ となるので $j = 3$ を選択する。

2-3 $\mathbf{d}_B = - \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} (1, 1, -2)^T = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$

2-4 $\theta^* = \min \left\{ -\frac{0}{-1/3}, -\frac{0}{-1/3} \right\} = 0$ となるが $B(\ell) = 4$ を選択する.

2-5 $(B(1), B(2), B(3)) = (3, 1, 6)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ より
 $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ となるので相変わらず停滞状態である.

3-2 $\bar{c}_2 = 2 - (-1, -1, 0) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix} (-1, 1, 3)^T = -1$, $\bar{c}_4 = 0 - (-1, -1, 0) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix} (1, 0, 0)^T =$
 2 , $\bar{c}_5 = 0 - (-1, -1, 0) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix} (0, 1, 0)^T = -1$ となるが $j = 2$ を選択する.

3-3 $d_B = - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix} (-1, 1, 3)^T = (-5, 2, -17)^T$

3-4 $\theta^* = \min \left\{ -\frac{0}{-5}, -\frac{0}{-17} \right\} = 0$ となるが $B(\ell) = 6$ を選択する.

3-5 $(B(1), B(2), B(3)) = (3, 1, 2)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix}$ より
 $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ となるので相変わらず停滞状態である.

4-2 $\bar{c}_4 = 2 - (-1, -1, 2) \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (1, 0, 0)^T = \frac{13}{3}$, $\bar{c}_5 = 0 - (-1, -1, 2) \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (0, 1, 0)^T =$
 $-\frac{2}{3}$, $\bar{c}_6 = 0 - (-1, -1, 2) \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (0, 0, 1)^T = \frac{1}{3}$ となるので $j = 5$ を選択する.

4-3 $d_B = - \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (0, 1, 0)^T = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})^T$

4-4 $\theta^* = \min \left\{ -\frac{0}{-1/3}, -\frac{0}{-1/3} \right\} = 0$ となるが $B(\ell) = 1$ を選択する.

4-5 $(B(1), B(2), B(3)) = (3, 5, 2)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ より
 $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ となるので相変わらず停滞状態である.

5-2 $\bar{c}_1 = -1 - (-1, 0, 2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} (2, 3, -5)^T = 2$, $\bar{c}_4 = 0 - (-1, 0, 2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1, 0, 0)^T =$
 -1 , $\bar{c}_6 = 0 - (-1, 0, 2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0, 0, 1)^T = -1$ となるが $j = 4$ を選択する.

5-3 $d_B = - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1, 0, 0)^T = (-3, 5, 2)^T$

5-4 $\theta^* = -\frac{0}{-3} = 0$ となるので $B(\ell) = 3$ を選択する.

5-5 $(B(1), B(2), B(3)) = (4, 5, 2)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ より
 $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ となるので相変わらず停滞状態である.

6-2 $\bar{c}_1 = -1 - (0, 0, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (2, 3, -5)^T = \frac{7}{3}$, $\bar{c}_3 = -1 - (0, 0, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (1, 1, -2)^T = \frac{1}{3}$, $\bar{c}_6 = 0 - (0, 0, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (0, 0, 1)^T = -\frac{2}{3}$ となるので $j = 6$ を選択する.

6-3 $d_B = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (0, 0, 1)^T = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$

6-4 $\theta^* = \min\{-\frac{0}{-1/3}, -\frac{0}{-1/3}\} = 0$ となるが $B(\ell) = 2$ を選択する.

6-5 $(B(1), B(2), B(3)) = (4, 5, 6)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ より $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ となり, 初期反復と同じ基底と基底実行可能解が求まってしまった.

このように, 基底実行可能解が退化している時には次のことが起こりえる.

- (a) ある $i = 1, \dots, m$ において $x_{B(i)} = 0$ であるのでステップ 4 で $\theta^* = 0$ となり, ステップ 5 で新しい基底は求まるが, 基底実行可能解は変わらない.
- (b) ステップ 4 にて $(**)$ に 2 つ以上の候補 $B(\ell)$ が存在する場合がある.

シンプレックス法ではステップ 2 $(*)$ とステップ 4 $(***)$ において添字を選ぶ自由度があるが, 運が悪ければ退化した基底実行可能解においてサイクリング (cycling) が起こる. つまり, 反復を繰り返しても新しい基底実行可能解が求まらない現象である. この現象を克服する方法として以下のルールがある.

定義 4.1 ブランドのルール (Bland's rule)

シンプレックス法の

- ステップ 2 $(*)$ において $\bar{c}_j < 0$ となる最小の添字 j を選ぶ.
- ステップ 4 $(**)$ において $\theta^* = -\frac{x_{B(\ell)}}{d_{B(\ell)}}$ となる最小の添字 $B(\ell)$ を選ぶ.

定理 4.1 シンプレックス法においてブランドのルールを用いると定理 3.3 の結果が退化した基底実行可能解を持つ線形計画問題に対してもいえる.

この結果は Robert G. Bland, “New finite pivoting rules for the simplex method,” *Mathematics of Operations Research* **2** (1977), pp. 103–107 によって初めて示された.

4.2 初期基底実行可能解の求め方: 2段階シンプレックス法 (two-phase simplex method)

今迄の数値例では線形計画問題が

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

そして $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ の形をしていたので, スラック変数 $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ を用いることにより自明な基底実行可能解が得られた. つまり

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{0}^T \mathbf{s} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

とし, 基底 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, 基底変数を $\mathbf{s} = \mathbf{b}$ ととればよかった. もちろん, 一般的な線形計画問題に対してはそのようなことはできない. しかし, 標準形の線形計画問題に対してシンプレックス法をうまく利用すれば, 初期の基底実行可能解を求めることができる.

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (5)$$

2 段階シンプレックス法

第 1 段階

1. 各等式制約（各行）を適当に -1 でかけて $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ となるようにする.
2. 人口変数 $y_1, y_2, \dots, y_m$ を (5) に取り入れて, 補助問題

$$\begin{cases} \text{minimize} & \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} + \mathbf{Iy} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

にシンプレックス法を適用して解く.

3. もし補助問題の最適値が正であれば, (5) は実行可能解を持たない問題であり, アルゴリズムを終了.
4. もし補助問題の最適値が 0 であれば, (5) は実行可能解を持つ問題である. もし 人口変数 が補助問題の最適解の基底変数でなければ, 補助問題の最適基底 (行列) はそのまま (5) の初期基底行列になり, (人口変数を除いた) 補助問題の最適解は (5) 初期基底実行可能解になる.
5. もし補助問題の最適解において ℓ 番目の基底変数が人口変数であれば, 列ベクトル $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ の ℓ 番目要素に注目. もしそれらの全ての要素が 0 であれば, 相応する制約は冗長であり, その制約 (等式) は取り除いても良い.

もしそうでなければ, j 列目において, ℓ 番目の要素が非零のものがある. 補助問題の基底において, ℓ 番目の基底変数に相当する列 (人口変数に相当する列) の代わりに $\mathbf{A}_j$ を基底に入れ替える, これを新しい基底とする. 全ての人口変数に相当する列が基底から取り除かれるまでこの操作を繰り返す.

第 2 段階

1. 第 1 段階で求まった基底および基底実行可能解を問題 (5) の初期基底および初期基底実行可能解とする.
2. 問題 (5) にシンプレックス法を適用する.

定理 4.2 任意の線形計画問題に対して 2 段階シンプレックス法を用いると以下の 2 つのいずれかの結果が得られる.

- (a) ステップ 3 にて実行可能領域が空集合であることがわかり, 最適値を $+\infty$ と決める.
- (b) 第 2 段階にてシンプレックス法が終了し, 定理 3.3 の結果がいえる. つまり, 最適値を $-\infty$ として決めるか, 有限な最適値が求まる.

4.3 改訂シンプレックス法 (改訂単体法)

シンプレックスアルゴリズムの計算量を考えると, 一番計算がかかるのが基底 $\mathbf{B}$ の逆行列を計算し, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ を全ての非基底変数の添字に対して求めるところにある. 改訂シンプレックス法は $\mathbf{B}^{-1}$ の情報をうまく利用して計算効率を上げたアルゴリズムである.