

例 2.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{とする.}$$

A_4, A_5, A_6, A_7 を基底列にとると,
 $x = (0, 0, 0, 8, 12, 4, 6)^T$ は基底解であり, さらに全ての要素が非負なので基底実行可能解でもある.

A_3, A_5, A_6, A_7 を基底列にとると,
 $x = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)^T$ は基底解であるが, 基底実行可能解ではない.

注釈 2.2 $Ax = b$ は $\sum_{i=1}^n A_i x_i = b$ と書けるので, 基底実行可能解においては b は A_i の凸結合として書くことができる.

基底と基底解の対応

- 異なる基底解は異なる基底と対応する.
- 異なる基底は同じ基底解を定めることもある (例えば $b = 0$ の場合).

既に定義したように 2 つの異なる基底解が同じ $n - 1$ 本の有効で線形独立な制約式によって定まる時, それらの基底解は隣接しているという.

定義 2.10 標準形の線形計画問題 (多面体) に対しては, 2 つの異なる基底が, 1 つの列を除いてその他の列が皆同じである時, (基底が) **隣接**しているという. つまり, 隣接する基底解は, 隣接する基底から得られる.

例 2.3 先ほどの例において, $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ と $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ は隣接している基底である. そして $x = (0, 0, 0, 8, 12, 4, 6)^T$ と $x = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)^T$ も隣接している基底解である.

2.5 退化

定義 2.11 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ を標準形の多面体とし, x を基底解とする. m を A の行数とする. もし x において $n - m + 1$ 以上の要素が零であるならば x は**退化した基底解**と呼ばれる.

2.6 端点の存在性

定義 2.12 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ を一般的な多面体とする. もしある $\mathbf{x} \in P$ と非零ベクトル $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ が存在し, $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \in P$ が任意のスカラー λ に対して満たされるならば多面体 P は直線を含むという.

定理 2.5 多面体 $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ が非空であると仮定する. 次の (a), (b) は同値である.

- (a) 多面体 P は最低 1 つの端点を持つ.
- (b) 多面体 P は直線を含まない.

証明: $(b) \Rightarrow (a)$ $\mathbf{x} \in P$ として, $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i\}$ とおく. もし $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$ のうち n 本が線形独立であれば, 定義より $\mathbf{x}$ は基底実行可能解になる. もしそうでなければ, すべての $\mathbf{a}_i, i \in I$ は $\mathbb{R}^n$ の真の部分空間に入っているのだから, $\exists \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0, \forall i \in I$. ここで直線 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ を定義する.

全ての $i \in I$ に対して, $\mathbf{a}_i^T \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$ が成り立つので $\mathbf{x}$ に対して有効な制約式は $\mathbf{y}$ に対しても有効になる.

仮定より多面体は直線を含まないのだから, ある $j \notin I$ と λ^* が存在し, $\mathbf{a}_j^T (\mathbf{x} + \lambda^* \mathbf{d}) = b_j$ が成り立つ.

この $\mathbf{a}_j$ は $\mathbf{a}_i (i \in I)$ の線形結合ではない. [なぜなら, $\mathbf{a}_j^T \mathbf{x} \neq b_j$ であり, $\mathbf{a}_j^T (\mathbf{x} + \lambda^* \mathbf{d}) = b_j$ より $\mathbf{a}_j^T \mathbf{d} \neq 0$. 従って, $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0, \forall i \in I$ より, $\mathbf{a}_j$ は $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$ の線形結合が張る空間に含まれない.]

従って, $\mathbf{x} + \lambda^* \mathbf{d}$ は $\mathbf{x}$ より有効で線形独立した制約式を最低でも一つ多く持つ. このような操作を繰り返していくと, 実行可能性を保ちながら, 有効で線形独立な制約式が n 本になるようなベクトル (端点) を求めることができる.

$(a) \Rightarrow (b)$

背理法より, P が直線 $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ を含むと仮定する. すると, $\mathbf{a}_i^T (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) \geq b_i, \forall i, \forall \lambda$ より $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0, \forall i$ が成り立つ.

[なぜなら, もし, $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} < 0$ なら, λ を十分大きくとると, 制約式 $\mathbf{a}_i^T (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) \geq b_i$ は満たされなくなるから. $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} > 0$ に対しても同様である.]

つまり, $\{\mathbf{a}_i \mid i = 1, \dots, m\}$ で線形独立なものは n 本未満になるのでこの多面体には基底解が存在しない (定義 2.6) ので基底実行可能解も存在しない. 定理 2.3 より端点も存在しないので矛盾が起こる. ■

系 2.2 有界で非空な多面体および標準形の非空な多面体は最低 1 つの基底実行可能解を持つ.

証明: 有界で非空な多面体は直線を含まない. また標準形の多面体 $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ は直線を含まない集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ の部分集合であるのだから, 非空なものは直線を含まない. よって定理 2.5 よりそれらの多面体は最低 1 つの基底実行可能解を持つ. ■

2.7 端点の最適性

定理 2.6 $c^T x$ を（必ずしも標準形の多面体でない）多面体 P 上で最小化する線形計画問題を考える． P が最低一つの端点を持っていると仮定する．すると、最適値は $-\infty$ か最適解になる端点が存在する．

証明： $x \in P$ に対して有効で線形独立な制約式が $k+1$ 本以上存在しないとき、 x はランク k を持つと言う．

最適解が有限であると仮定する．

線形計画問題の実行可能領域が多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ で表されているとする．ある $x \in P$ においてランクが $k < n$ であるとする．これから x より大きなランクで $c^T y \leq c^T x$ となるような $y \in P$ が存在することを示す．

$I = \{i \mid a_i^T x = b_i\}$ とおくと、 $k < n$ なので、 $\{a_i \mid i \in I\}$ は全て $\mathbb{R}^n$ の真の部分空間に属する．つまり、 $\exists d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0, a_i^T d = 0, \forall i \in I$ ．また、 $c^T d \leq 0$ と仮定しても差し支えない．[もしそうでなければ d の符号を反転すればよい．]

- $c^T d < 0$ と仮定する．

半直線を $y = x + \lambda d, \lambda \geq 0$ と定義する．すると $a_i^T y = b_i, \forall i \in I$ が成り立つ．もし半直線が完全に P に含まれるなら、最適値は $-\infty$ になるので、仮定に反する．つまり、 $a_j^T (x + \lambda^* d) = b_j$ を満たす $\lambda^* > 0, j \notin I$ が存在する．そして、 $y := x + \lambda^* d$ と定義すると、 $c^T y < c^T x$ となり、定理 2.5 の証明と同様に a_j と $\{a_i \mid i \in I\}$ は線形独立であり、 y のランクは $k+1$ となる．

- $c^T d = 0$ と仮定する．

直線 $y = x + \lambda d, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ を定義する． P は直線を含まないの、上記と同様に $c^T y = c^T x$ を満たし、 x よりランクが大きい $y \in P$ を求めることができる．

まとめると、 x よりランクが大きくて $c^T y \leq c^T x$ が成り立つ $y \in P$ が求められた．

このプロセスを繰り返していくと、任意の $x \in P$ からランクが n になり、 $c^T w \leq c^T x$ を満たす w が求まる（つまり、 w は基底実行可能解になる）．

任意の多面体の基底実行可能解は有限個しか存在しないので、全ての $x \in P$ に対して、上記を満たす基底実行可能解 $w^1, \dots, w^r$ が求まったとする．ここで、 $c^T w^* \leq c^T w^t, t = 1, \dots, r$ となるような w^* を $w^1, \dots, w^r$ から 1 つ定める．

$\Rightarrow c^T w^* \leq c^T x, \forall x \in P$ になるので、 w^* は最適基底実行可能解である． ■

系 2.3 非空な（必ずしも標準形の多面体でない）多面体 P 上で最小化する線形計画問題を考える．最適値は $-\infty$ になるか最適解が必ず存在する．

証明： 任意の線形計画問題は標準形の線形計画問題に（同値）変換することが出来る．仮定より、標準形の線形計画問題を形成する多面体は非空であり、系 2.2 よりこの多面体には端点が存在する．よって、定理 2.6 より明らか． ■

2.8 演習問題

演習問題 2.1 次の各項目について、多面体であるかどうか判断せよ．

(a)

$$\begin{aligned} x \cos \theta + y \sin \theta &\leq 1, \quad \forall \theta \in [0, \pi/2], \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \end{aligned}$$

を満たすような $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の集合．

(b) $x^2 - 8x + 15 \leq 0$ を満たすような $x \in \mathbb{R}$ の集合.

(c) 空集合.

演習問題 2.2 次の多面体の端点をすべて求めよ.

(a) 4次元の立方体

(b) 4次元のシンプレックス $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$

(c) $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$

演習問題 2.3 標準形の多面体を $P = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ とする. 但し, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で $\mathbf{A}$ の全ての行は線形独立であると仮定する. また, 該当する項目については適当な目的関数ベクトル $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ が定義されているとする. 次の各項目について正しいか正しくないかを判断せよ. 正しい場合は証明を, 正しくない場合は反例を示せ.

- (a) 全ての最適解からなる集合は有界集合である.
- (b) もし 2つ以上の最適解があるならば, 非可算個の最適解が存在する.
- (c) 全ての最適解 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ において, $m+1$ 個以上の要素が正であることは無い.
- (d) 全ての最適解からなる集合は凸集合である.
- (e) $n = m+1$ とすると, P は最大 2つの基底実行可能解を持つ.

演習問題 2.4 P と Q を $\mathbb{R}^n$ の多面体とし, $P+Q = \{ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q \}$ とする.

- (a) $P+Q$ は多面体であることを示せ.
- (b) $P+Q$ の端点は丁度 P と Q の端点の和であることを示せ.

演習問題 2.5 P を $\mathbb{R}^n$ の有界多面体であるとし, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ とする. 多面体 Q を次のように定義する: $Q = \{ \mathbf{x} \in P \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \}$. Q の各端点は P の端点であるか P の隣接する 2つの端点の凸結合であることを示せ.

注釈 2.3 ベクトル $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ および 非負のスカラー $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ が与えられている時, ベクトル $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}^i$ はベクトル $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ の凸結合と呼ばれる.

演習問題 2.6 次に定義された多面体の基底解, 基底実行可能解を全て求めよ. また, $(-0.5, 1.5)$ に隣接する基底解をあげよ.

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \geq -1, \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

演習問題 2.7 次の標準形の多面体の基底解を授業で紹介した手順により求めよ．またその中で基底実行可能解はどれか．

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 10x_1 - x_2 - 4x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

演習問題 2.8 定理 2.5が既に証明済みであると仮定する．更に

(c) $\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_m^T$ の中に n 本の線形独立なベクトルが存在する．

となる事実が (a) と (b) と同値であることを示せ．

演習問題 2.9 次の標準形の多面体の基底解を授業で紹介した手順により求めよ．またその中で基底実行可能解はどれか．

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \left| \begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 6x_1 - 6x_2 = 7, \\ x_1 + 8x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

演習問題 2.10 すべての線形計画問題は同値の標準形の線形計画問題に変換できることが分かっている．また，非空の標準形の多面体は最低一つの端点を持っていることも分かっている．従って，任意の非空な多面体は最低一つの端点を持っていると結論づけてしまう誘惑にかられるが，この論理でどこが間違っているかを示せ．

3 線形計画問題に対するシンプレックス法（単体法） — 基本的な概念

以降、標準形の線形計画問題を考える。

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

但し、 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ とする。

3.1 基本的な考え方

3.2 最適性の条件

定義 3.1 $\mathbf{x} \in P$ とする。あるベクトル $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ に対して、正のスカラー θ が存在し、 $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d} \in P$ が満たされる時、 $\mathbf{d}$ を実行可能方向（feasible direction）と呼ぶ。

シンプレックス法の動き

$\mathbf{x}$	基底実行可能解	（定理 2.4）
$B(1), \dots, B(m)$	基底変数の添字	
$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)})$	基底	

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{x}_B & = & (x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)})^T & \text{基底変数} \\ \mathbf{x}_N & \text{ただし} & [\mathbf{x}_N]_i, \quad i \neq B(1), \dots, B(m) & \text{非基底変数} \end{cases}$$

さらに

$$\begin{cases} \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} & \text{基底変数} \\ [\mathbf{x}_N]_i = 0 & i \neq B(1), \dots, B(m) \quad \text{非基底変数} \end{cases}$$

● 基底実行可能解 $\mathbf{x}$ から $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d}$ へ移動することを考える ($\theta \geq 0$)。ただし、非基底変数 x_j のみを 0 から θ に変更し、その他の非基底変数を 0 に保ち続けたい。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} \mathbf{d}_B \\ \mathbf{d}_N \end{pmatrix} \quad \text{ただし,} \quad \mathbf{d}_N = \begin{cases} 1 & \text{添字 } j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$x + \theta d$ も実行可能解でなくてはならない

$$(I) \quad A(x + \theta d) = b \Rightarrow Ad = 0 \quad (\because Ax = b)$$

よって

$$0 = Ad = \sum_{i=1}^n A_i d_i = \sum_{i=1}^m A_{B(i)} d_{B(i)} + A_j = Bd_B + A_j$$

定理 2.4 より B は正則行列であるから

$$d_B = -B^{-1}A_j \in \mathbb{R}^m \quad (3)$$

となる.

$$(II) \quad x + \theta d \geq 0$$

(a) 基底実行可能解 x が非退化である場合.

$x_B > 0$ なので, θ を十分に小さい正の数としてとると, $x_B + \theta d_B \geq 0$ が成り立つ. また, $x_N + \theta d_N = \theta e_j > 0$ も成り立つ. したがって, $d = (d_B^T, d_N^T)^T \in \mathbb{R}^n$ は実行可能方向になる.

(b) 基底実行可能解 x が退化している場合.

d は実行可能方向でない場合もある. 例えば, ある $i = 1, \dots, m$ に対して $x_{B(i)} = 0$ かつ $d_{B(i)} = -[B^{-1}A_j]_{B(i)} < 0$ の場合は $x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} < 0, \forall \theta > 0$ となる.

x から $x + \theta d$ へ移動した時の目的関数の変化を考える

$$c^T x \longrightarrow c^T (x + \theta d) = c^T x + \theta c^T d$$

となり, d の定義を思い出すと, $c^T d = c_B^T d_B + c_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$ となる.

定義 3.2 x を基底解とし, B をその基底解を定める基底とする. c_B を基底変数に相当する添字に対応する目的関数ベクトルとする. 任意の j に対して

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j \quad (4)$$

を減少コスト (reduced cost) と呼ぶ.

ちなみに, 基底変数に相当する添字に対する減少コストを計算すると $i = 1, \dots, m$,

$$\bar{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - c_B^T B^{-1} A_{B(i)}. \text{ そして } B = (A_{B(1)} \cdots A_{B(m)}), B^{-1}B = I \text{ から } B^{-1}A_{B(i)} = e_i$$

となるので $\bar{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - c_B^T e_i = c_{B(i)} - c_{B(i)} = 0$ となる.

例 3.1 数値例

次にあげる標準形の線形計画問題を考える.

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \text{minimize} & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\ \text{subject to} & & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 + x_4 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & & & + & 4x_3 & & + & x_5 & = & 4 \\ & & - & 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & + & x_6 & = & 1 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 & & & & & & \end{array} \right.$$

この例では $n = 6, m = 3$ である.

$B(1) = 4, B(2) = 5, B(3) = 6$ とすると,

$\mathbf{x} = (0, 0, 0, 6, 4, 1)^T$ は基底実行可能解になる.

また, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (6, 4, 1)^T$, $\mathbf{x}_N = (0, 0, 0)^T$ となる.

$\mathbf{x}$ は退化していない基底実行可能解であるので, 例えば $\mathbf{d} = (0, 0, 1, 1, -4, 1)^T$ は実行可能方向になる (式 (3) にて $\mathbf{A}_3$ を代入して計算すれば求められる). またこの添字に関して減少コストを計算すると,

$$\bar{c}_3 = -1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \mathbf{I} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

であるので, $\mathbf{d}$ の方向へ移動すれば目的関数値が減ることわかる.

定理 3.1 $\mathbf{x}$ を基底実行可能解, $\mathbf{B}$ が相当する基底, そして $\bar{\mathbf{c}}$ を減少コストとする.

(a) もし $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$ なら $\mathbf{x}$ は最適解である.

(b) もし $\mathbf{x}$ が最適解で非退化なら $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$ である.

証明: (a) $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$ として, $\mathbf{y}$ を任意の実行可能解とする. $\mathbf{d} := \mathbf{y} - \mathbf{x}$ と定義すると $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ から $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ となる.

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d}_B + \sum_{i \in N} \mathbf{A}_i d_i = \mathbf{0}$$

$\mathbf{B}$ は正則であるので $\mathbf{d}_B = -\sum_{i \in N} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i d_i$ となり, 結局

$$\mathbf{c}^T \mathbf{d} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{d}_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i) d_i = \sum_{i \in N} \bar{c}_i d_i$$

となる.

非基底変数の添字 $i \in N$ に対して, $x_i = 0$ であり, $\mathbf{y}$ は実行可能解であるから $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ である. 従って, $d_i = y_i - x_i = y_i \geq 0$ となる.

$$\therefore \bar{c}_i d_i \geq 0, \forall i \in N, \quad \bar{c}_{B(i)} = 0, \forall i = 1, \dots, m$$

結局 $\mathbf{c}^T \mathbf{d} = \mathbf{c}^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{d} \geq 0$ であるので, $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ が導かれる.

(b) $\mathbf{x}$ が最適解で非退化であるとする. 背理法を用いて, $\bar{c}_j < 0$ がある添字 j で成り立つとする. 基底変数の添字に対しては減少コストは零なので, x_j は当然非基底変数である.

$\mathbf{x}$ は非退化なので, $\mathbf{d}_B = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ と定義すると, 前にも説明したように, $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_B^T, \mathbf{d}_N^T)^T$ は実行可能方向になる. また, この方向へ $\mathbf{x}$ から移動すると, 目的関数値は $\mathbf{c}^T (\mathbf{x} + \theta \mathbf{d})$ となり, 必ず減るので $\mathbf{x}$ は最適解でないことになる. よって矛盾する. ■

注釈 3.1 定理より, $\mathbf{x}$ が退化した最適解であれば $\bar{c}_j < 0$ となることがあり得る.

3.3 シンプレックス法 (単体法)

ここではシンプレックスアルゴリズムの基本的な反復を紹介する. しばらくの間, 全ての基底実行可能解は非退化である と仮定する.

シンプレックス法のある反復で基底 $\mathbf{B}$ と基底実行可能解 $\mathbf{x}$ が求まっているとする. これらに対して減少コスト $\bar{c}_j$ を非基底変数の全ての添字に対して式 (4) によって計算する.

もし $\bar{c}_j \geq 0, \forall j \in N$ であれば, 定理 3.1 より $\mathbf{x}$ は最適解になる.

もし $\bar{c}_j < 0$ となる $j \in N$ が存在すれば式 (3) を用いて実行可能方向 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ を求めることができ,