以降の議論では多面体は

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \geq b_i, & i \in M_1 \\ \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i, & i \in M_2 \\ \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} = b_i, & i \in M_3 \end{array} \right\}$$

であるとする．但し，M_1, M_2, M_3 は有限な添字集合とする．

定義 2.5 ベクトル $\boldsymbol{x}^*$ が M_1, M_2, M_3 の添字 i に対して $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}^* = b_i$ を満たすならば，その制約式は $\boldsymbol{x}^*$ に対して**有効（active）**であるという．

定理 2.2 多面体 P と $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ が与えられ，$I = \{i \mid \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}^* = b_i\}$ を $\boldsymbol{x}^*$ に対して有効な制約式の添字集合であるとする．以下の項目は同値である．

(a) $\{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\}$ の中に n 本の線形独立なベクトルが存在する．

(b) $\{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\}$ が張る空間は $\mathbb{R}^n$ である．つまり，$\mathbb{R}^n$ の任意の要素は $\{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\}$ の線形結合で表すことができる．

(c) $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} = b_i,\ \forall i \in I$ の連立線形方程式は唯一の解を持っている．

証明：

$\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$ $\{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\}$ の中に n 本の線形独立なベクトルが存在するとする．これらのベクトルが張る空間は次元が n であり，$\mathbb{R}^n$ と同じになる．

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ $\{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\}$ の中に線形独立なベクトルが $n-1$ 本以下であるとすると，$\{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\}$ の線形結合は $n-1$ 次元の部分空間になるので矛盾する．

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(c)}}$ $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} = b_i,\ \forall i \in I$ の連立線形方程式が２つ以上の解，$\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$ を持っているとすると，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2 \neq 0$ は $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{d} = 0,\ \forall i \in I$ を満たす．$\boldsymbol{d}$ は各ベクトル $\boldsymbol{a}_i,\ \forall i \in I$ に直交するので，$\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{a}_i,\ \forall i \in I$ の線形結合として書き表すことができないので矛盾する．

$\boxed{\text{(c)} \Rightarrow \text{(b)}}$ $\{\boldsymbol{a}_i, \mid i \in I\}$ が $\mathbb{R}^n$ を張らないとする．この部分空間に直交するベクトル $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ が存在する．もし $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} = b_i,\ \forall i \in I$ を満たすならば $\boldsymbol{a}_i^T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}) = b_i,\ \forall i \in I$ となり，２つ以上の解が存在するので矛盾する．∎

定義 2.6 線形等式と線形不等式から定義された多面体 P と $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする．

(a) 次の *(i)* と *(ii)* を満たす時，$\boldsymbol{x}^*$ を**基底解（basic solution）**と呼ぶ．

- **(i)** すべての等式制約を満たす（有効である）．
- **(ii)** 有効な制約式の中に n 本の線形独立なものが存在する．

(b) もし $\boldsymbol{x}^*$ が多面体の全ての（等式・不等式）制約を満たす基底解であれば，それを**基底実行可能解（basic feasible solution）**と呼ぶ．

かりに，多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ を定義するのに用いる制約式の数 m が n より小さければ，任意の点（ベクトル）において有効な制約式の数は n より小さくなるので基底解も基底実行可能解も存在しなくなる．

定理 2.3 P を非空の多面体とし，$\boldsymbol{x}^* \in P$ とする．ならば

(a) $\boldsymbol{x}^*$ は端点；

(b) $\boldsymbol{x}^*$ は基底実行可能解；

は同値である．

証明：　一般性を失うことなく，P は $\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geq b_i,\ \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} = b_j$ で定義されているとする．

$\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$ 背理法を用いて，$\boldsymbol{x}^* \in P$ が基底実行可能解でないとする．$I = \{i \mid \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}^* = b_i\}$ ととると $\boldsymbol{x}^*$ は基底実行可能解でないので，$\{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\}$ で線形独立なものは n 未満である．

$$\therefore \{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\} \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の真の部分空間を張る．}$$

従って，$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{d} = 0,\ \forall i \in I$ を満たす $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ が存在する．

$\varepsilon > 0$ とし，$\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x}^* + \varepsilon\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{z} := \boldsymbol{x}^* - \varepsilon\boldsymbol{d}$ とする．$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{z} = b_i,\ \forall i \in I$ が成り立つ．また，$i \neq I$ に対して，$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}^* > b_i$ であり，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} > b_i$ が成り立つ．同じように $\boldsymbol{z}$ についても成り立つ．よって，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in P$ となる．（$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}^* > b_i$ が存在しない場合は下の事実が成り立つことは明らか．）

つまり，$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}}{2}$ が成り立つので，$\boldsymbol{x}^*$ は端点ではない．

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ 背理法より，$\boldsymbol{x}^* = \lambda\boldsymbol{y} + (1-\lambda)\boldsymbol{z}$ となるような $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in P,\ \lambda \in (0,1),\ \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}^*$ が存在すると仮定する．

$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} \geq b_i,\ \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{y} = b_j,\ \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{z} \geq b_i,\ \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{z} = b_j$ が成り立つ．

$I = \{i \mid \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}^* = b_i\}$ と定義すると，$\forall i \in I$ に対して $\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}^* = \lambda\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} + (1-\lambda)\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{z} = b_i$ となり，$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{z} = b_i$ となる．$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}^*$ なので，定理 2.2 より $\{\boldsymbol{a}_i \mid i \in I\}$ で線形独立なものは n 未満である． ∎

注釈 2.1 あるベクトルが非空な多面体 P の基底実行可能解であるための必要十分条件は，そのベクトルが端点であることである．端点は多面体の記述式に依存しないので，基底実行可能解であることも同様に依存しない．これは基底解が記述式によって異なることとは対照的である．

系 2.1 多面体 P が有限本の線形等式・不等式制約で定義されているとする．ならばこの多面体は有限個の基底解もしくは基底実行可能解しか持たない．

証明：　多面体が m 本の線形等式・不等式制約で定義されているとする．n $(\leq m)$ 本の線形独立で有効な制約式は（それらを満たす）ベクトルを一意に定めるので，異なる n 本の組から定まる基底解はそれぞれ異なる場合がほとんどである．

よって，基底解の数は m 本の制約式から有効とみなされる n 本の線形独立な制約式の組合せの数に上からおさえられる．基底実行可能解の数は基底解の数より多くないので，同様な結果が基底実行可能解についても成り立つ． ∎

基底実行可能解の数が上からおさえられていても，その数は非常に大きくなることもある．例えば，立方体 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ は $2n$ 本の制約式で定義されているが，2^n 個の基底実行可能解を持つ．

定義 2.7 $\mathbb{R}^n$ の異なる２つの基底解が共通に $n-1$ 本の有効で線形独立な制約式を持ち合わせているとき，それらの基底解は**隣接**しているという．

2.4　標準形の多面体

標準形の線形計画問題に相当する多面体を標準形の多面体という．

定義 2.8 標準形の多面体

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}, \quad 但し \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m.$$

以降の議論では標準形の多面体を想定し，次の仮定が満たされているとする．

仮定 2.1 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の m 本の行は線形独立である．つまり *full rank* であり，当然ながら $m \leq n$ である．

もし $\boldsymbol{A}$ の行がお互いに線形従属であれば，冗長な制約式が存在するので，削除しても多面体は変わらない．

基底解を定めるためには n 本の有効で線形独立な制約式が必要である．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は m 本の有効な制約式を与え，しかも仮定2.1より線形独立である．残りの $n-m$ 本の有効な制約式は $x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots n)$ から得る必要がある．それらの中で有効な制約式が n 本線形独立になるためには次の定理が成り立たなくてはならない．

定理 2.4 標準形の多面体が与えられていて，仮定 *2.1*が満たされているとする．

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ は基底解}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が成り立ち，次の条件を満たしている } B(1), \ldots, B(m) \text{ という添字が存在する．}$$

(a) 列 $\boldsymbol{A}_{B(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{B(m)}$ は線形独立．($\boldsymbol{A}_i$ は $\boldsymbol{A}$ の i 列を表す．)
(b) $i \neq B(1), \ldots, B(m)$ ならば $x_i = 0$.

証明: $\boxed{\Uparrow}$ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とし，$B(1), \ldots, B(m)$ が (a),(b) を満たすとする．有効な制約式 $x_i = 0,\ i \neq B(1), \ldots, B(m)$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ から次のことが言える:

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i x_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

列 $\boldsymbol{A}_{B(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ は線形独立なので，$x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ は一意に定まる．つまり有効な制約式のみからなる連立線形方程式は唯一の解を持つ．定理 2.2 より有効な制約式の中に n 本の線形独立な制約式がある．よって，$\boldsymbol{x}$ は基底解である．

$\boxed{\Downarrow}$ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を基底解とし，(a) と (b) が成り立つことを証明する．$\boldsymbol{x}$ の非零要素を $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ とする．$\boldsymbol{x}$ は基底解なので，定理 2.2 より有効な制約式から構成される次の連立線形方程式 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i x_i = \boldsymbol{b}$, $x_i = 0$ $(i \neq B(1), \ldots, B(k))$ は唯一の解を持つ．つまり $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \boldsymbol{b}$ は唯一の解を持っている．従って，$\boldsymbol{A}_{B(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{B(k)}$ は線形独立である．[$\because$ もしそうでなければ，全てが零でない $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ が存在し，$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_{B(i)} \lambda_i = \boldsymbol{0}$ が成立する．つまり，$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_{B(i)} (x_{B(i)} + \lambda_i) = \boldsymbol{b}$ から解の唯一性に反する別の解が得られる．]

$\boldsymbol{A}$ の行は線形独立なので，m 本の線形独立な $\boldsymbol{A}$ の列が存在する．

$$\therefore k \leq m.$$

ここでは証明を行わないが，$\boldsymbol{A}$ の列の中から $m - k$ の列 $(\boldsymbol{A}_{B(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{B(m)})$ を選びだして，$\boldsymbol{A}_{B(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ が線形独立になるようにできる．

$k \leq m$ であるので $i \neq B(1), \ldots, B(m)$ ならば当然 $i \neq B(1), \ldots, B(k)$ なので，$i \neq B(1), \ldots, B(m)$ ならば $x_i = 0$ となる．∎

基底解を作る手順

1. $\boldsymbol{A}$ から m 本の線形独立な列を選ぶ $\boldsymbol{A}_{B(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{B(m)}$.
2. $x_i = 0,\ i \neq B(1), \ldots, B(m)$ とおく．
3. $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ を変数として，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く．

- 定理 2.4 より，この手順で標準形の多面体に対して 全て の基底解を求めることができる．
- この手順によって作られる基底解が非負ならば，それは 基底実行可能解 になる．
- 逆に，任意の基底実行可能解は基底解なので，この手順で 全て 計算できる．

定義 2.9 基底解 $\boldsymbol{x}$ が与えられているとする．ならば，$\boldsymbol{x}_B = (x_B(1), \ldots, x_B(m))^T$ は**基底変数**と呼ばれ，その以外の要素から成る変数 $\boldsymbol{x}_N$ を**非基底変数**と呼ぶ．また $\boldsymbol{A}_{B(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{B(m)}$ は（線形独立な）**基底列**であり，$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{A}_{B(1)} \cdots \boldsymbol{A}_{B(m)}\right)$ は**基底行列**と定義する．

基底行列が分かっていると，基底変数は次のように定めることができる．

$$\boxed{\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}}$$