計画数学第一 （平成２４年度前期）

担当 ： 福田 光浩
TA ： グエン　マイン　ハー
宮崎 慶

【講義概要】
オペレーションズ・リサーチの手法である線形計画法，動的計画法，分枝限定法などについて講義および演習を行う．

【講義の目的】
オペレーションズ・リサーチの手法である線形計画法，動的計画法，組合せ最適化問題などに対するアルゴリズムを実際に紙面や計算機上で計算を行い理解をすること．

【講義計画】

1. 線形計画問題とは
2. 多面体の性質
3. 線形計画問題に対するシンプレックス法（単体法）の基本的な考え方
4. 線形計画問題に対するシンプレックス法（単体法）の技術的な側面
5. 線形計画問題に対する改訂シンプレックス法（改訂単体法）
6. 線形計画問題の双対性について
7. 感度分析
8. 輸送問題
9. 動的計画法
10. 分枝限定法
11. 整数計画問題—ナップザック問題—
12. 整数計画問題—巡回セールスマン問題—
13. 割当問題
14. 最短路問題

【参考書】
D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, "Introduction to Linear Optimization," (Athena Scientific, Dynamic Ideas, LLC, Belmont, Massachusetts, 1997).
藤澤克樹，後藤順哉，安井雄一郎,「Excel で学ぶ OR」，オーム社，２０１１年．
など

【履修の条件】
「応用線形代数」,「アルゴリズムとデータ構造」などを履修していることが望ましい．

【成績評価】
試験とレポート．

- 中間試験（5 月 29 日（火）予定）は講義計画の 1.～7. の内容について行われる．
- 期末試験（8 月 7 日（火）予定）は講義計画 8.～14. の内容について行われる．
- なお，評価基準は中間試験，期末試験がそれぞれ４割，演習のレポートが２割を目安にします．

【担当教員の一言】

講義の内容に関して毎回演習を行い，レポートを提出してもらいます．講義と演習の両方に出席することが必要です．

1　線形計画問題

1.1　生産計画問題

例 1.1　Ｓ社では３種のぶどう Ｇ１，Ｇ２，Ｇ３ を原材料として，赤，白，ロゼの３種類のワインを生産している．各ワイン１単位生産することによって得られる収益と，１単位生産するために必要なぶどうの量が下表のように与えられている．ぶどうの１日あたりの最大供給量が表の最下行のように制限されているとして，総収益を最大にするような各ワインの１日あたりの生産量を決定せよ．

	ぶどう（トン／単位）			収益
ワイン	Ｇ１	Ｇ２	Ｇ３	（百万円／単位）
１．赤	2	1	0	2
２．白	0	0	3	3
３．ロゼ	0	2	1	2
最大供給量（トン／日）	4	8	6	

この問題は，いわゆる線形計画問題として定式化される問題の一例です．実際に定式化する前に，このような問題の難しさがどこにあるのかを考えてみましょう．まず，収益を最大にするという意味から考えますと，収益率の一番高い白ワインだけを生産するのが良さそうです．白ワインを作るためには，ぶどうＧ３だけを原料として使いますが，原料Ｇ３の最大供給量を使っても，１日２単位が生産の限界です．それでは，原料Ｇ１とＧ２だけを使う，赤ワインも可能な限り作ることにしたら良いのでしょうか．つまり，白ワイン２単位，赤ワイン２単位の生産となります．確かに総収益は増えますが，それが一番良い保証はありません．例えば，白ワインの生産を１単位減らして，その代りにロゼを３単位生産することにより，さらに総収益は増加するのです．

以上の考察から，生産量の微妙な兼合を求めることに，問題の一つの難しさがあることがわかります．さらに現実の問題では，決定したい量が，何百，何千種類になるため，このような問題を体系的に，しかも効率良く解く方法がどうしても必要になってくるのです．

それでは，上記の問題を定式化してみましょう．各ワイン，赤，白，ロゼの生産量をそれぞれ x_1, x_2, x_3 単位と置くことにします．まず，各原料の供給量に制限がありますので，それらの条件を数式で記述します．例えば，生産に必要なぶどうＧ１の総量は，１日につき４トンを越えることはできませんので，不等式

Ｅ１：　$2x_1 + 0x_2 + 0x_3 \leq 4$　　　（左辺＝生産に必要なぶどうＧ１の総量）

が必要です．同様に，Ｇ２，Ｇ３に関して，

Ｅ２：　$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leq 8$
Ｅ３：　$0x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 6$

が成り立つ必要があります．また，生産量は負の値を取れないことから，

Ｅ４：　$x_1 \geq 0$
Ｅ５：　$x_2 \geq 0$
Ｅ６：　$x_3 \geq 0$

を得ます．

以上から，Ｅ１～Ｅ６の連立不等式を満たす x_1, x_2, x_3 の組は，原料の供給制限を越えない”実現

可能な生産計画 ” いうことになります．ここで，総収益が最も多い生産計画を求めるためには問題：

条件　Ｅ１ ～ Ｅ６　の下で
総収益 $= 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad \longrightarrow$ 　最大化

を解けば良いことになります．

1.2　線形計画問題の定義

実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対し，次のように与えられる実変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

を**線形関数**（linear function） と呼びます．また f が線形関数で b が与えられた実数のとき，次のような関係式：

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b,$$

は**線形等式**（linear equality）と呼ばれ，

$$\begin{array}{rcl} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \geq & b, \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & b, \end{array}$$

は**線形不等式**（linear inequality）と呼ばれます．**線形制約式**または**線形制約条件**（linear constraint）とは，線形等式または線形不等式いずれかをさします．

線形計画問題（Linear Programming Problem, Linear Program, or LP）もしくは**線形最適化問題**（Liner Optimization Problem, or LOP）とは，有限個の線形制約式の下で線形関数を最大（または最小）にする問題：

$$\left\{ \begin{array}{lccccccccl} \text{maximize} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\ \text{subject to} & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \quad (i = 1, \ldots, k), \\ & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \quad (i = k+1, \ldots, k'), \\ & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \geq & b_i \quad (i = k'+1, \ldots, m) \end{array} \right. \tag{1}$$

として定義されます．ここで，関数 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ は，ＬＰの**目的関数**（objective function）と呼ばれます．

例えば，生産計画問題 例 1.1 はＬＰであり，以下のような問題もＬＰの例です．

例 1.2

$$\left\{ \begin{array}{lccccccc} \text{maximize} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{subject to} & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 4 \\ & -4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0} \end{array} \right.$$

例 1.3

$$\left\{ \begin{array}{lccccccccr} \text{minimize} & -3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & & \\ \text{subject to} & -4x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & -11 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & \leq & -10 \\ & -3x_1 & - & 2x_2 & & & + & 3x_4 & \geq & 1 \\ & \multicolumn{9}{l}{x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 0} \end{array} \right.$$

n 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が制約条件式をすべて満足するとき，それを**実行可能解**（feasible solution, or FS）と呼びます．例えば， 例 1.2 では

$$\begin{array}{rcl}(x_1, x_2, x_3) & = & (0,0,0)\\ (x_1, x_2, x_3) & = & (2,1,0)\end{array}$$

は，いずれも実行可能解です．

実行可能解の中で目的関数を最大化（最小化問題では最小化）するものは，**最適解**（optimal solution, or OS）と呼ばれます．最適解は複数ある場合もあります．後ほど説明しますが，

$$(x_1, x_2, x_3) \quad = \quad (2,1,0)$$

は，実は 例 1.2 の最適解となっています．目的関数を最適解で求めた値を**最適値** （optimal value, or OV）と呼びます．

ＬＰの中には，実行可能解を持たないものがあります．例えば，問題：

$$\left\{\begin{array}{lrcrcr}\text{maximize} & x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{subject to} & x_1 & + & x_2 & \geq & 6\\ & -x_1 & - & x_2 & \geq & -4\end{array}\right.$$

は，明らかに実行可能解を持ちません．このような問題を**実行不可能**（infeasible）な問題と呼び，それ以外の問題を**実行可能**（feasible）な問題と呼びます．当然のことながら，実行不可能な問題には最適解は存在しません．

それでは実行可能な問題は，常に最適解をもつでしょうか．次のＬＰを見てみましょう：

$$\left\{\begin{array}{lrcrcr}\text{maximize} & 2x_1 & - & x_2 & & \\ \text{subject to} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6\\ & -x_1 & - & 3x_2 & \leq & -4\end{array}\right.$$

この問題では，任意の x_2 の値に対し x_1 の値を十分大きく取ることにより実行可能解を得ることができます．そして目的関数値は $x_1 \to \infty$ に従い，無限大に発散します．一般に，任意の実数 M に対し目的関数値 $> M$（最小化問題では $< M$）となるように実行可能解が取れるとき，そのＬＰは**非有界**（unbounded）であると呼ばれ，それ以外の問題は**有界**（bounded）な問題と呼ばれます．もちろん非有界な問題には最適解は存在しません．

以上から，ＬＰが最適解を持つためには，問題が実行可能でかつ有界であることが必要条件です．線形計画法における最も基本的な定理はこの逆も正しいことを主張しています．つまり，

定理 1.1 （基本定理）
実行可能で有界な線形計画問題は最適解を持つ．

この定理は一見，自明のようですが，次のようなＬＰではない問題に対しては同様の定理は成り立ちません：

$$\left\{\begin{array}{lrcl}\text{maximize} & x_1 & & \\ \text{subject to} & x_1 & < & 6\\ \multicolumn{4}{l}{\quad\text{（注意：}< \text{は強い意味の不等号で，}= \text{を含まない），}}\\ \text{minimize} & \exp(x_1) & & \\ \text{subject to} & x_1 & \leq & 0.\end{array}\right.$$

ＬＰの基本定理は，条件を満たす任意のＬＰに対し実際に最適解を求めるアルゴリズム（シンプレックス法）を与えることにより証明されます．

1.3　標準形の線形計画問題

ＬＰは一般的に (1) の形で書けるが，後ほど説明するシンプレックス法（単体法）では常に以下で定義される　**標準形**を用いる．

$$\begin{cases} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{2}$$

但し，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$T$　はベクトル／行列の転置，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ を表し，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$　は n 次元の非負変数ベクトルとする．

上記の標準形のＬＰ (2) が一般形のＬＰ (1) の特殊ケースであることは明らかであるが，逆に一般形のＬＰは等価な標準形のＬＰに変形することが可能である．ここで等価とはどちらかの問題の実行可能解が分かれば，もう一方の問題で同じ目的関数値を戻す実行可能解が作れることを意味する．つまり片方の問題が解ければ，もう一方の問題も同時に解けることになる．

この様に，一般的なＬＰを標準形のＬＰに変換するには以下の３と通りの変換が考えられる．

1. 目的関数 $f(\cdot)$　を最大化する　$\leftrightarrow$　目的関数 $-f(\cdot)$　を最小化する．
2. **自由変数をなくす：** もし無制約の変数 x_j　が (1) に存在するならば，$x_j^+ - x_j^-$　で置き換える．ここで $x_j^+, x_j^- \geq 0$　は非負の新しい変数とみなす．
3. **不等式制約をなくす：** もし以下のような不等式制約が (1) に登場するならば，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

新しい**スラック変数** s_j　を導入して

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i &= b_i \\ s_i &\geq 0 \end{aligned}$$

に置き換える．

1.4　線形計画法の歴史

1947 年 Dantzig は軍事的なロジステックスやスケジュリング問題の自動解法として 単体法 (シンプレックス法) を考案．

- 様々な応用があり，オペレーションズ・リサーチと最適化の幕明けとされる．
- 単体法は多項式時間アルゴリズムであるか?

1972 年 Klee-Minty による例題

- 単体法は多項式時間アルゴリズムでないことが分かるが，実用的な問題ではそのような病的な例はほとんど存在しない．
- 線形計画問題を解く多項式時間アルゴリズムは存在するか?

1979 年 Kachiyan により多項式時間アルゴリズムである 楕円体法による解法が発表される．

- しかし理論と実用とのギャップが判明する．
- 実用的な多項式アルゴリズムは存在するか?

1984 年 Karmarkar により 射影変換法が発表される．

- 内点法の幕開けになり，世界中の研究者が競って研究に取り組む．

1987 年 小島-水野-吉瀬，Megiddo らにより 主双対内点法が発表される．

- 現在実装されている方法の一つ．

1.5　演習問題

演習問題 1.1（輸送問題）　ＬＰとして定式化しなさい．

ある製造業社は，A_1，A_2，A_3 の三つの工場で製品を製造し，それを三つの取引先 B_1，B_2，B_3，B_4 に納入している．これらの工場ではそれぞれ９０，８０，１００単位ずつ製造している．各取引先からの注文量はそれぞれ７０，４０，６０，５０である．各工場と各取引先間の輸送費（ドル／単位）は下表のように与えられているとして，費用を最小にする輸送計画を立てよ．

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	7	１２	１０
A_2	１６	6	１３	１５
A_3	１０	7	１４	１３

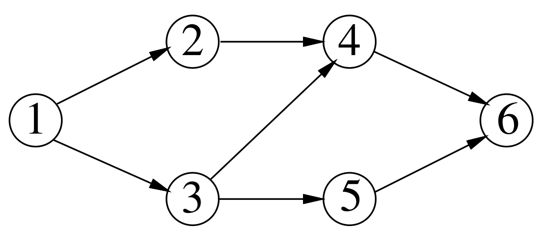
演習問題 1.2（栄養問題）　ＬＰとして定式化しなさい．

ある母親は，子供たちに，穀物の朝食から栄養を摂らせたいと思っている．子供たちは，クランチー，あるいいはクリスピーあるいはそれらを混ぜたものを食べる．彼らは，朝食から，少なくとも１ミリグラムのサイアミンと，５ミリグラムのナイアミンと，４００カロリーを摂取しなくてはならない．クランチーとクリスピーの栄養成分と価格は次の表で与えられている．なるべく安く条件を満たすにはどのように朝食を組み合わせれば良いか．

	カロリー (kcal/ounce)	サイアミン (mg/ounce)	ナイアミン (mg/ounce)	価格 (cent/ounce)
クランチー	１１０	０．１０	１．００	３．８
クリスピー	１２０	０．２５	０．２５	４．２

演習問題 1.3（日程計画問題）　ＬＰとして定式化しなさい．

図はある工事の作業の流れを示したものである．例えば，作業 *4* は作業 *2* と *3* が終了するまで開始できないことを意味する．この工事はＴ日以内で終らせねばならず，各作業 i は t_i 日かかる．しかし臨時作業員を雇うことにより s_i 日まで作業日数を減らせる．このとき，１日減らすのに m_i 万円かかる．どの作業に何日割り当てるべきか．



演習問題 1.4（生産計画問題）　ＬＰとして定式化しなさい．

ある肉詰め製造工場では，毎日豚肉をモモ肉４８０単位，腹肉４００単位，肩肉２３０単位生産している．これらのどの製品の生肉または燻製として売られる．１日の規定労働時間内に燻製できるもも肉，腹肉，肩肉の総量は４２０単位である．さらに，規定時間外に２５０単位を超過費用のもとで燻製にすることができる．単位量当たりの純益は次の通りである：

	規定時間内 生肉（ドル）	規定時間内 燻製（ドル）	規定時間外 燻製（ドル）
もも肉	8	１４	１１
腹肉	4	１２	7
肩肉	4	１３	9

目標は総利益を最大にする生産計画を求めることである．

演習問題 1.5　ＬＰ：

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{maximize} & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{subject to} & -x_1 & + & 3x_2 & \le & 12 \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 8 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \le & 10 \\ & & & \multicolumn{3}{l}{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0} \end{array}$$

において，その実行可能解の領域を描いなさい．実行可能領域で目的関数を最大にする点を見つけなさい．

演習問題 1.6　一般の線形計画問題において，もし $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ がどちらも実行可能解であれば，その凸結合：

$$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}' \qquad \text{ただし}\ \lambda \text{は}\ 0 \le \lambda \le 1\ \text{なる実数}$$

も，実行可能解であることを示しなさい．そして，その幾何学的な意味を考えなさい．

演習問題 1.7　次のＬＰについて，それぞれ（ａ）実行不可能である,（ｂ）非有界である,（ｃ）最適解をもつ，ための s, t に関する必要十分条件を与なさい：

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{maximize} & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{subject to} & sx_1 & + & tx_2 & \le & 1 \\ & & & \multicolumn{3}{l}{x_1,\ x_2 \ge 0} \end{array}$$

演習問題 1.8　つぎの命題を証明しなさい．また逆は成り立ちますか．
線形計画問題：

$$\begin{array}{lrcrcccrcll} \text{maximize} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & & \\ \text{subject to} & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \le & b_i & (i = 1, \ldots, m) \\ & & & & \multicolumn{7}{l}{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0} \end{array}$$

が非有界であれば，ある k に対し，

$$\begin{array}{lrcrcccrcll} \text{maximize} & x_k & & & & & & & & & \\ \text{subject to} & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \le & b_i & (i = 1, \ldots, m) \\ & & & & \multicolumn{7}{l}{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0} \end{array}$$

は非有界である．

演習問題 1.9 （日程計画問題）　ＬＰとして定式化しなさい．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + 3|x_2 + 10| \\ \text{subject to} & |x_1 - 2| + |x_2 + 1| \le 5 \end{array}$$

2　線形計画問題の幾何

2.1　動機づけ

次の線形計画問題を考える．

$$\begin{cases} \text{minimize} & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.2　多面体と凸集合

定義 2.1 次の集合を**多面体（polyhedron）**と呼ぶ

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}\}$$

但し，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

例 **2.1** 標準形の線形計画問題の実行可能領域は多面体である．

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \right\}$$

定義 2.2 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が与えられている時，ある定数 K が存在し，S の任意の要素のノルムが K で上からおさえられる時，S を**有界（bounded）**（集合）と呼ぶ．

定義 2.3 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ とし，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ および $\lambda \in [0,1]$ に対して $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S$ が満たされている時，S を**凸集合（convex set）**と呼ぶ．

定理 2.1

(a) 凸集合の交わりは凸集合である．

(b) 多面体は凸集合である．

証明：

(a) I をある添字集合とし，$S_i,\ i \in I$ を凸集合族とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が $\cap_{i \in I} S_i$ に属しているとし，$\lambda \in [0,1]$ とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は各 $S_i,\ i \in I$ に属し，S_i は凸集合であるので，$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S_i,\ i \in I$．従って，$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in \cap_{i \in I} S_i$．

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ とする．$S_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \geq b_i\}, i = 1, \ldots, m$ と定義する．また，ある $i = 1, \ldots, m$ に対して $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_i,\ \lambda \in [0,1]$ とすると，

$$\boldsymbol{a}_i^T(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \geq \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i$$

となるので，$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S_i$ となり，S_i は凸集合である．従って，(b) の結果は (a) より導かれる．∎

2.3 端点と基底実行可能解

定義 2.4 P を多面体とし，$\boldsymbol{x} \in P$ とする．$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y} + (1-\lambda)\boldsymbol{z}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ とは異なる $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in P$ および $\lambda \in (0,1)$ が存在しない時，$\boldsymbol{x}$ を P の**端点（extreme point）**と呼ぶ．