

第2章 直流回路

2.1 抵抗とオームの法則

オームは、導線の長さ l を変えたとき、電流値 I (電気分解による気体の生成量) も変わることを発見した。これを数式で表現すると

$$I = \frac{E_0}{R_i + R_l} \quad (2.1)$$

ここで、 E_0 、 R_i は一定値で、 R_l は導線の長さに比例する。

回路理論では、 E_0 が電源の**開放電圧**、 R_i が電源の**内部抵抗**、 R_l は導線の抵抗である。

式 (2.1) は、電源の内部抵抗 R_0 と導線の抵抗 R_l を合わせて抵抗 R とすると、抵抗に電流 I が流れたとき、抵抗の両端に現れる電圧 (**電圧降下**) E は

$$E = RI \quad (2.2)$$

と表されることを意味している。これを**オームの法則**と呼ぶ。オームの法則は直流回路だけではなく、交流回路でも使われる回路理論の基本法則である。

2.2 抵抗の直列および並列接続

この節では、抵抗がいくつも接続されたときの合成抵抗について考える。種々の接続方法が考えられるが、基本となる直列接続と並列接続を扱う。

2.2.1 直列接続

図 2.1 に示す抵抗の**直列接続**では、各抵抗を流れる電流 I は同じである。それぞれの抵抗の電圧降下は

$$E_1 = R_1 I, E_2 = R_2 I, \dots, E_n = R_n I$$

である。

一方、全体の電圧降下 E は

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^n E_i$$

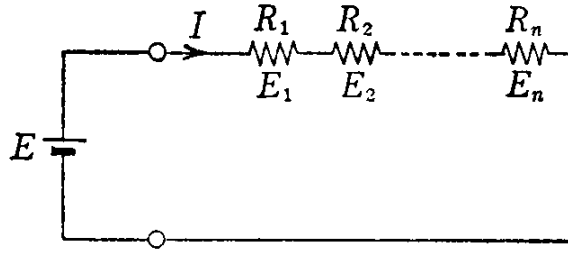


図 2.1: 抵抗の直列接続

であるから、合成抵抗 R は

$$R = \frac{E}{I} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (2.3)$$

と表される。すなわち、合成抵抗は、それぞれの抵抗の和になる。

2.2.2 並列接続

図 2.2 に示す抵抗の**並列接続**では、それぞれの抵抗に加わる電圧 E が共通である。各抵抗を流れる電流は

$$I_1 = \frac{E}{R_1}, I_2 = \frac{E}{R_2}, \cdots, I_n = \frac{E}{R_n}$$

と表される。

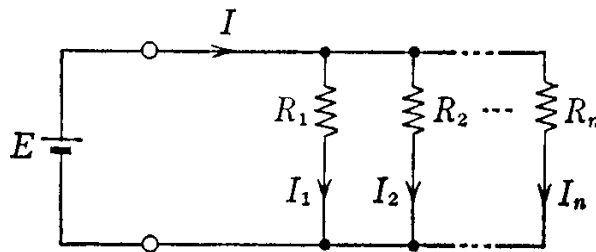


図 2.2: 抵抗の並列接続

一方、電源から流れ出る電流 I は

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \sum_{i=1}^n I_i$$

であるから、合成抵抗 R の逆数は

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (2.4)$$

となる。すなわち、合成抵抗の逆数は、それぞれの抵抗の逆数の和である。

2.3 電圧源と電流源

電圧源

内部抵抗が0で、その端子にいかなる負荷が接続された場合にも、常に一定の端子電圧を示す電源を**電圧源**という。出力電圧が0の電圧源は、単なる短絡回路と同じである。

電池などの実際の電源は、電圧源と内部抵抗の直列接続回路として扱うことができる。

電流源

内部抵抗が無限大で、端子にいかなる負荷が接続された場合にも、常に一定の電流を出力する電源を**電流源**という。出力電流が0の電流源は、開放回路と同じである。

2.4 直流電力と整合

図 2.3 のように、内部抵抗 R_i 、開放電圧 E_0 の電源に抵抗 R を接続すると、回路電流 I は

$$I = \frac{E_0}{R_i + R} \quad (2.5)$$

また、抵抗の端子電圧 E_R は

$$E_R = RI = \frac{E_0 R}{R_i + R} \quad (2.6)$$

と表される。したがって、抵抗で消費される電力 P は

$$P = E_R I = RI^2 = \frac{RE_0^2}{(R_i + R)^2} \quad (2.7)$$

と表される。この P が、電源から抵抗に供給される電力である。

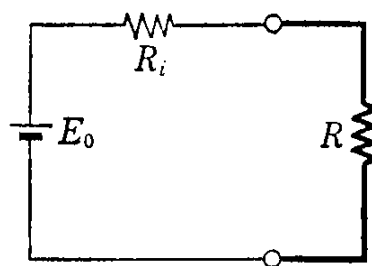


図 2.3:

E_0 と R_i は一定として、 R の値を変化させたときの電力 P の変化を考える。式 (2.7) を変形すると

$$P = \frac{1}{\left(\sqrt{R} - \frac{R_i}{\sqrt{R}}\right)^2 + 4R_i} E_0^2$$

となるので

$$\sqrt{R} - \frac{R_i}{\sqrt{R}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad R = R_i \quad (2.8)$$

のとき P は最大値 P_{max}

$$P_{max} = \frac{E_0^2}{4R_i} \quad (2.9)$$

となる。

内部抵抗 R_i 、開放電圧 E_0 の電源から外部に取り出すことのできる最大電力が、この P_{max} で、電源の**固有電力**と呼ばれる。

電源から固有電力 P_{max} を取り出せるのは、式 (2.8) からわかるように、負荷抵抗 R が電源の内部抵抗 R_i に等しいときで、この抵抗 R を**整合負荷**と呼んでいる。

2.5 キルヒホッフの法則

任意の回路網の電流や電圧を知るために**キルヒホッフの法則**がある。

電源と抵抗の接続状態を示すには、図 2.4 に示す回路で十分である。ここで線分 l_1 , l_2 , l_3 を枝、枝の接続点 A, B を節点、 l_1 と l_2 , l_2 と l_3 , l_3 と l_1 で作られる回路を閉路と呼んでいる。

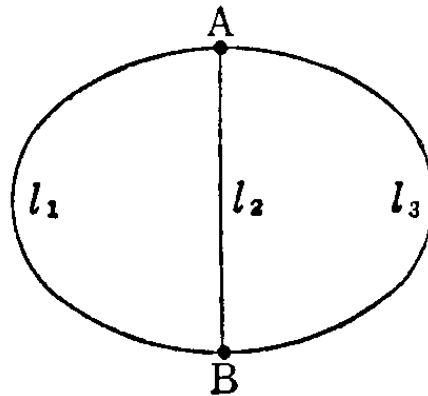


図 2.4:

キルヒホッフの法則は次のように表現される。

第1法則

一つの節点に流れ込む電流の代数和は零である。

第2法則

回路中の任意の閉路について、電源の起電力と抵抗による逆起電力の代数和は零である。

ここで代数和とは、電流や電圧の方向を定義し、その方向に応じて符号を付けて表し、それらの和をとることである。

キルヒホッフの第1法則は**電流則**，第2法則は**電圧則**とも呼ばれている。

キルヒホッフの法則を用いると，複雑な回路の電流，電圧を求めることができる。次に，キルヒホッフの法則を用いて例題を解く。

例題

図 2.5 で各枝の電流を図のように定め，節点 A について第1法則を用いると

$$I_1 + (-I_2) + (-I_3) = 0 \quad (2.10)$$

閉路 $E_1 - R_1 - R_2 - E_2$ に第2法則を適用すると

$$E_1 + (-I_1 R_1) + (-I_2 R_2) + E_2 = 0 \quad (2.11)$$

また，閉路 $E_3 - R_3 - E_2 - R_2$ からは

$$E_3 + (-I_3 R_3) + (-E_2) + I_2 R_2 = 0 \quad (2.12)$$

が得られる。

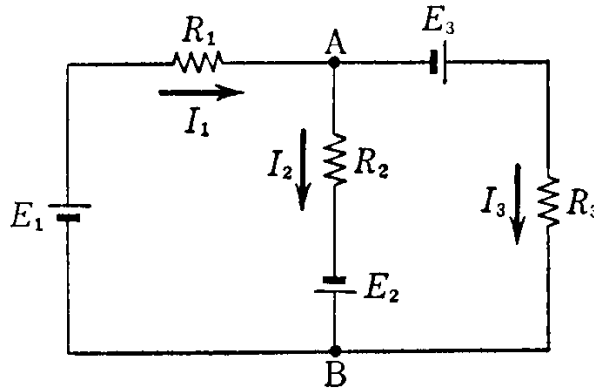


図 2.5:

ところで，未知数は3つであるから，独立な方程式も3つあれば良い。もし，閉路 $E_1 - R_1 - E_3 - R_3$ に第2法則を適用すると

$$E_1 + (-I_1 R_1) + E_3 + (-I_3 R_3) = 0 \quad (2.13)$$

が得られるが，これは式 (2.11) と式 (2.12) の和をとったものと同じであるので，独立ではない。

式 (2.10)，(2.11)，(2.12) から I_1 ， I_2 ， I_3 を求めると

$$\Delta = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$$

として

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{\Delta} \{ (R_2 + R_3) E_1 + R_3 E_2 + R_2 E_3 \} \\ I_2 = \frac{1}{\Delta} \{ R_3 E_1 + (R_1 + R_3) E_2 - R_1 E_3 \} \\ I_3 = \frac{1}{\Delta} \{ R_2 E_1 - R_1 E_2 + (R_1 + R_2) E_3 \} \end{cases} \quad (2.14)$$

が得られる。

2.6 重ねの理

線形回路で成り立つ**重ねの理**は、電源がいくつか存在するときの各部の電流や電圧は、それぞれの電源によって生じる各部の電流や電圧の和で表されることをいう。

例を用いて示そう。図 2.5 で電源 E_1 , E_2 , E_3 により、式 (2.14) で示される電流 I_1 , I_2 , I_3 が流れるが、それぞれの電源が別々に存在するときの電流を求めてみる。

ここで、それぞれの電源が別々に存在するとは、考えている電源以外は、電圧 0 の電圧源 (短絡) あるいは電流 0 の電流源 (開放) で置き換えることを意味する。

電源 E_1 だけが存在するときの各抵抗を流れる電流 I'_1 , I'_2 , I'_3 は、 $\Delta = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1$ を用いて

$$\begin{cases} I'_1 = \frac{1}{\Delta}(R_2 + R_3)E_1 \\ I'_2 = \frac{1}{\Delta}R_3E_1 \\ I'_3 = \frac{1}{\Delta}R_2E_1 \end{cases} \quad (2.15)$$

同様に、電源 E_2 , E_3 だけが存在する場合の電流はそれぞれ

$$\begin{cases} I''_1 = \frac{1}{\Delta}R_3E_2 \\ I''_2 = \frac{1}{\Delta}(R_1 + R_3)E_2 \\ I''_3 = \frac{1}{\Delta}(-R_1E_2) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} I'''_1 = \frac{1}{\Delta}R_2E_3 \\ I'''_2 = \frac{1}{\Delta}(-R_1E_3) \\ I'''_3 = \frac{1}{\Delta}(R_1 + R_2)E_3 \end{cases} \quad (2.17)$$

と求められる。

電源 E_1 , E_2 , E_3 に対する電流の和をとると、式 (2.15), (2.16), (2.17) より

$$\begin{cases} I'_1 + I''_1 + I'''_1 = \frac{1}{\Delta}\{(R_2 + R_3)E_1 + R_3E_2 + R_2E_3\} \\ I'_2 + I''_2 + I'''_2 = \frac{1}{\Delta}\{R_3E_1 + (R_1 + R_3)E_2 - R_1E_3\} \\ I'_3 + I''_3 + I'''_3 = \frac{1}{\Delta}\{R_2E_1 - R_1E_2 + (R_1 + R_2)E_3\} \end{cases} \quad (2.18)$$

となる。上式の右辺は電源 E_1 , E_2 , E_3 が同時に存在するときの電流 I_1 , I_2 , I_3 とそれぞれ等しいことが、式 (2.14) との比較からわかる。

2.7 鳳-テブナンの定理

鳳-テブナンの定理は等価電源の定理とも呼ばれ、回路の等価変換に使われる重要な定理の一つである。この定理は、次のように言うことができる。

図 2.6(a) のように、多数の電源を含む回路に負荷抵抗 R_L を接続したときに現れる出力電圧 V_0 は、負荷を開放したときの開放電圧 V_f と、電源を除いた回路の内部抵抗 R_0 を用いて、次式により与えられる。

$$V_0 = \frac{R_L}{R_0 + R_L} V_f \quad (2.19)$$

すなわち、図 2.6(a) の端子 1-1' から回路を見込んだ等価回路は同図 (b) のように表すことが

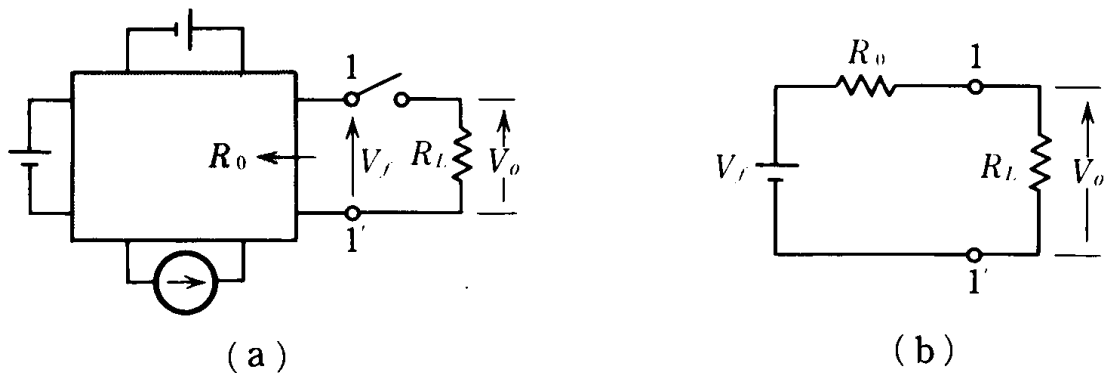


図 2.6: 鳳-テブナンの定理

できることを意味している。ただし、電源を除く際、電圧源は短絡、電流源は開放とする。

この鳳-テブナンの定理は、重ねの理を用いて、次のように証明できる。

図 2.7(a) に示すように、開放電圧 V_f と等しい出力の電源 I と II を向かい合わせにして出力回路に挿入する。このとき、両者の電圧は打ち消し合うので、回路状態は図 2.6(a) と同じである。重ねの理を用いて、図 2.7(b) のように、電源 II を除く。このとき、端子 1-1' 間の電圧は 0 であるから、負荷に流れる電流は 0 である。次に、図 2.7(c) に示すように、電源 II 以外の電源を全て除くと、端子 1-1' から見た回路抵抗は R_0 であるから、 R_L を流れる電流 I_0 は

$$I_0 = \frac{V_f}{R_0 + R_L} \quad (2.20)$$

となる。したがって、全ての電源が接続された状態、すなわち図 2.6(a) で抵抗 R_L を流れる電流 I_0 は、図 2.7(b), (c) の電流 I_0 を加え合わせたもので (図 2.7(b) では 0), 式 (2.20) の値にほかならない。したがって、抵抗 R_L を接続したときの端子 1-1' 間の電圧 V_0 は

$$V_0 = \frac{R_L}{R_0 + R_L} V_f \quad (2.21)$$

となることがわかる。これで、鳳-テブナンの定理は証明された。図 2.6(b) と図 2.7(c) とが同じものであることも理解できるであろう。

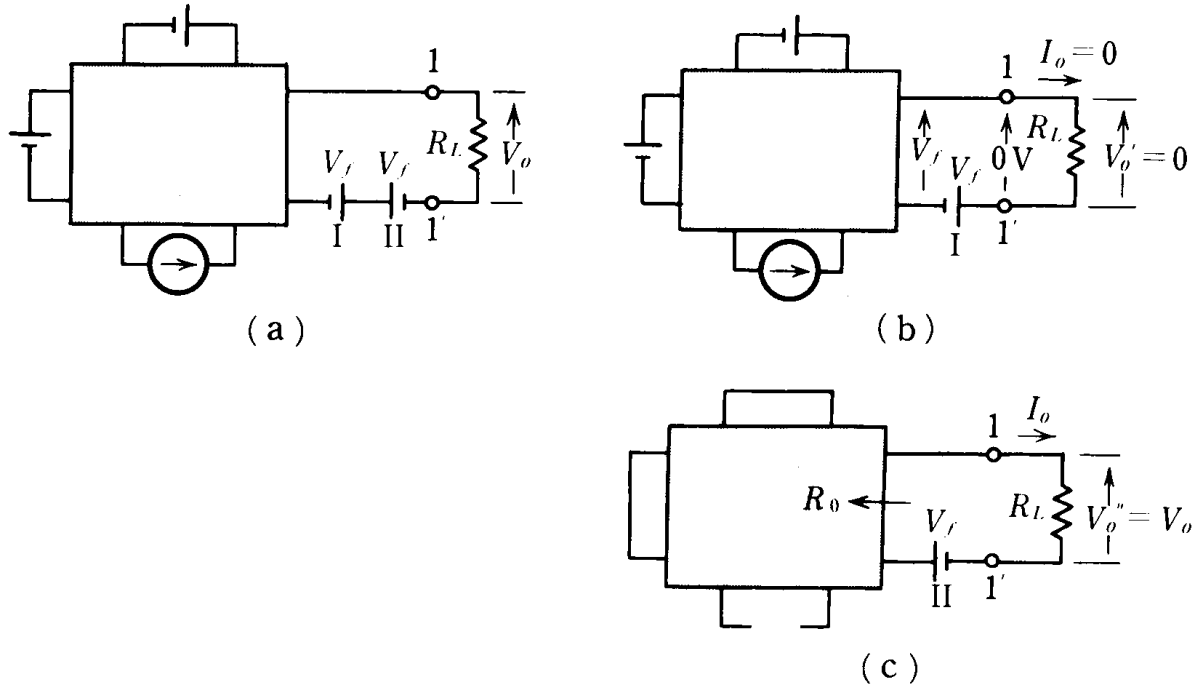


図 2.7: 鳳-テブナンの定理の証明

2.8 ノートンの定理

鳳-テブナンの定理に対応して、電流源を用いた等価電源の定理が**ノートンの定理**である。

図 2.8(a) において、端子 $1-1'$ を短絡したときの短絡電流を I_s 、電源を除いた内部アドミタンスを Y_0 とすると、端子 $1-1'$ から見た等価回路は同図 (b) のように表され、負荷アドミタンス Y_L を接続したときの電圧 V_L は次式で与えられる。

$$V_L = \frac{I_s}{Y_0 + Y_L} \quad (2.22)$$

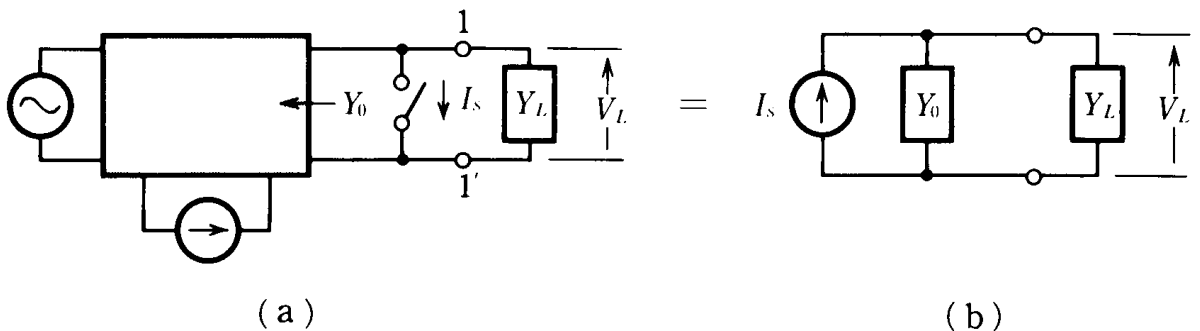


図 2.8: ノートンの定理

ノートンの定理は次のように証明される。図 2.9 のように、端子 $1-1'$ に並列に、大きさ I_s で方向が反対の電流源 I と II を接続する。電流源 I と II が同時に接続された状態は、お互いに

電流を打ち消し合うので、これらが接続されていない、元の状態と同じである。電流源 II を取り除くと、電流源 I には短絡電流と等しい電流が流れるので、負荷 Y_L を接続しても電流が流れず、 $V_L = 0$ となる。電流源 II 以外を取り除くと、図 2.8(b) と同じ等価回路が得られ、元の回路がノートンの等価回路で表されることがわかる。

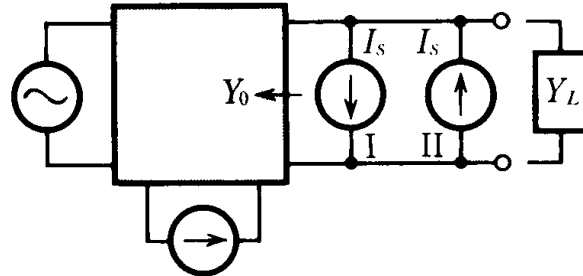


図 2.9: ノートンの定理の証明

2.9 補償定理

補償定理は素子の値が変化したときの影響を調べるときに有用で、次のように記述される。

電流 I_0 が流れている回路の枝にインピーダンス Z を挿入したとき、挿入によって生じる回路中の電圧、電流の変化分は、回路中の電源を全て取り除き、 Z と直列に Z に I_0 が流れたときと同じ向きの電圧源 ZI_0 を加えたときの各部の電圧、電流と等しい。

補償定理は次のように証明される。図 2.10(a) のように、電流 I_0 が流れている枝を外に取り出す。次に、同図 (b) のように Z を挿入すると回路のインピーダンスが増えるので、電流は $I_0 - \Delta I$ に減少する。ここで、同図 (c) のように、 Z の電圧降下を打ち消す向きに電圧源 ZI_0 を入れると同図 (a) と同じ状態になるので、電流は I_0 に回復する。さらに同図 (d) のように、この電源源 I を打ち消す向きに ZI_0 の電圧源 II を挿入する。これは同図 (b) と同じ状態であるから、再び枝電流は $I_0 - \Delta I$ になる。したがって、同図 (e) のように、II 以外の電源を全て取り除くと、電流の変化分 ΔI が求められる。図 (d) は図 (c) と図 (e) の重ね合わせになっている。

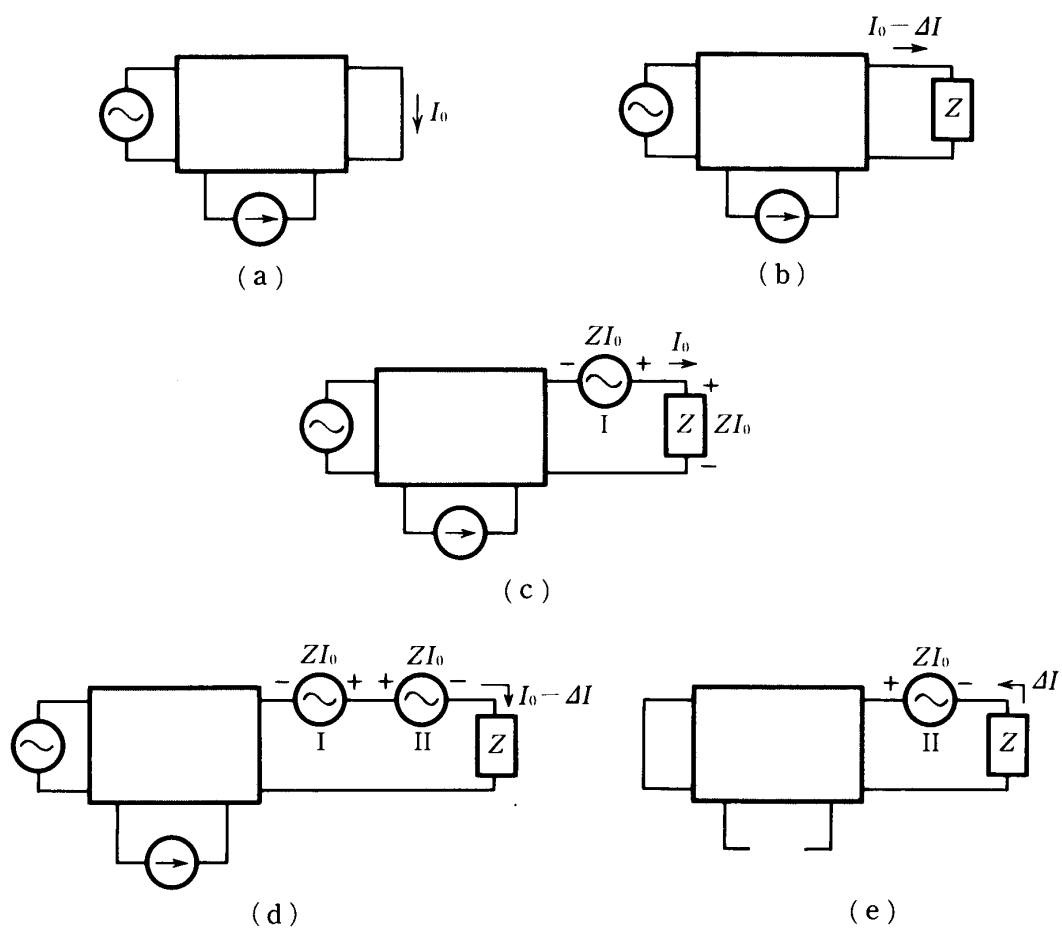


图 2.10: 補償定理