

原子炉理論 第5回 (原子炉の1群拡散理論(1))

講義ノート

東京工業大学 小原 徹

5. 原子炉の1群拡散理論

5.1 時間依存の平板原子炉

(a) 拡散方程式の解

断面積 $\Sigma_a, \Sigma_{tr}, \Sigma_f$ を持つ核燃料物質で出来た一様の平板の原子炉

1群拡散方程式

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Sigma_a \phi(x, t) = v \Sigma_f \phi(x, t) \quad \dots (1)$$

初期条件

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) = \phi_0(-x) \quad (\text{対称}) \quad \dots (2)$$

境界条件

$$\phi\left(\frac{\tilde{a}}{2}, t\right) = \phi\left(-\frac{\tilde{a}}{2}, t\right) = 0 \quad \dots (3)$$

解を次の形に仮定する (変数分離)

$$\phi(x, t) = \psi(x)T(t) \quad \dots (4)$$

(4)式を(1)式に代入して,両辺を $\psi(x)T(t)$ で割ると

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{v}{\psi} \left[D \frac{d^2 \psi}{dx^2} + (v \Sigma_f - \Sigma_a) \psi(x) \right] \equiv -\lambda \quad (\text{定数}) \quad \dots (5)$$

よって

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda T(t) \quad \dots (6)$$

$$D \frac{d^2 \psi}{dx^2} + (v \Sigma_f - \Sigma_a) \psi(x) = -\frac{\lambda}{v} \psi(x) \quad \dots (7)$$

時間依存の式(6)の解

$$T(t) = T(0)e^{-\lambda t} \quad \dots (8)$$

空間依存の式

$$D \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{v} + v \Sigma_f - \Sigma_a \right) \psi(x) = 0 \quad \dots (9)$$

$$\text{境界条件} : \psi\left(\frac{\tilde{a}}{2}\right) = \psi\left(-\frac{\tilde{a}}{2}\right) = 0 \quad \dots (10)$$

λ は未定の定数である。

次の固有値問題を考える。

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + B_m^2 \psi_n(x) = 0 \quad \dots (11)$$

$$\psi_n\left(\frac{\tilde{a}}{2}\right) = \psi_n\left(-\frac{\tilde{a}}{2}\right) = 0$$

(2)式の初期条件から,対称性の成り立つ解にのみ注目すると,

固有関数

$$\psi_n(x) = \cos B_n x$$

固有値

$$B_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\tilde{a}} \right)^2, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad \dots (12)$$

(9)式を(11)式と同じ固有値問題と考えると, λ は次のようになる。

$$\lambda = v \Sigma_a + v D B_n^2 - v \Sigma_f \equiv \lambda_n, \quad n = 1, 3, 5 \quad \dots (13)$$

λ_n : 時間固有値

よって(1)式の一般解は,

$$\phi(x, t) = \sum_{\substack{n \\ \text{奇数}}} A_n \exp(-\lambda_n t) \cos \frac{n\pi x}{\tilde{a}} \quad \dots (14)$$

(14)式は境界条件(3)式を満たしている。

初期条件(2)式から,

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) = \sum_{\substack{n \\ \text{奇数}}} A_n \cos \frac{n\pi x}{\tilde{a}} \quad \dots (15)$$

直交性から,

$$A_n = \frac{2}{\tilde{a}} \int_{-\frac{\tilde{a}}{2}}^{\frac{\tilde{a}}{2}} dx \phi_0(x) \cos \frac{n\pi x}{\tilde{a}} \quad \dots (16)$$

よって

$$\phi(x, t) = \sum_{\substack{n \\ \text{奇数}}} \left[\frac{2}{\tilde{a}} \int_{-\frac{\tilde{a}}{2}}^{\frac{\tilde{a}}{2}} dx' \phi_0(x') \cos B_n x' \right] \exp(-\lambda_n t) \cos B_n x \quad \dots (17)$$

このとき時間固有値

$$\lambda_n = v \Sigma_a + v D B_n^2 - v v \Sigma_f, \quad B_n = \frac{n\pi}{\tilde{a}} \quad \dots (18)$$

(b)長時間経過後の振る舞い

(12)式から

$$B_1^2 < B_3^2 < \dots < B_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\tilde{a}} \right)^2 \quad \dots (19)$$

よって(18)式から

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_5 \dots \quad \dots (20)$$

すなわち(17)式で大きな n に対応するモード (項) は時間と共に急速に減少する。

$t \rightarrow \infty$ のとき

$$\phi(x, t) \sim A_1 \exp(-\lambda_1 t) \cos B_1 x \quad \dots (21)$$

(基本モード)

初期値の形 $\phi_0(x)$ に関わりなく, 十分時間が経つと中性子束は基本モードの形になる。

ここで,

$$B_1^2 = \left(\frac{\pi}{\tilde{a}} \right)^2 \equiv B_g^2 \equiv \text{幾何学的バックリング} \quad \dots (22)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{意味} \quad \text{モードの曲率の測定} \\ B_n^2 = -\frac{1}{\psi_n} \frac{d^2 \psi_n}{dx^2} \quad ((11)\text{式より}) \end{array} \right]$$

(c)臨界条件

中性子束分布が原子炉内で時間に依存しない条件。すなわち,核分裂連鎖反応を定常的に
行わせる条件。

この状態を原子炉の臨界と定義

臨界 $\equiv$ 時間に依存しない中性子束が,原子炉内で維持される状態
(核分裂以外の中性子源は存在しないで)

中性子束の一般解

$$\phi(x,t) = A_1 \exp(-\lambda_1 t) \cos B_1 x + \sum_{\substack{n=3 \\ n, \text{奇数}}}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n t) \cos B_n x \quad \dots (23)$$

中性子束が時間に依存しないとき,最低次の時間固有値は 0 になる。

$$\lambda_1 = 0 = \nu(\Sigma_a - \nu\Sigma_f) + \nu DB_1^2 \quad \dots (24)$$

高次モード ($n=3,5,\dots$) は $-\lambda_n$ が負なので,時間と共に減衰する。したがって,

$$\phi(x,t) \rightarrow A_1 \cos B_1 \neq \text{時間の関数}$$

(24)式の B_1^2 を B_g^2 でおきかえると

$$B_m^2 = B_g^2 \quad \text{臨界条件} \quad \dots (25)$$

$$\text{ここで, } B_m^2 \equiv \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad \text{材料バックリング} \quad \dots (26)$$

原子炉を臨界にするには寸法 (B_g^2) かまたは炉心構成 (B_m^2) を調整して, $B_m^2 = B_g^2$ を達成すればよい。

ここで,

$$B_m^2 > B_g^2 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \Rightarrow \text{超臨界}$$

$$B_m^2 = B_g^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \text{臨界}$$

$$B_m^2 < B_g^2 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \Rightarrow \text{未臨界}$$

の関係が成り立つ。

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{\tilde{a}}\right)^2$$

$$B_m^2 = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

$$t \rightarrow \infty \quad \phi(x,t) \rightarrow A_1 \exp(-\lambda_1 t) \cdot \cos B_g x$$