7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 3 回（逆井　2012 年 5 月 21 日）

演習問題 (テーマ: 偏微分, 全微分, 合成函数の微分)

[1] 次の函数を x, y それぞれについて偏微分せよ.

(1) $f(x,y) = e^{xy^2}\cos(x^2+y)$　　(2) $g(x,y) = \log_y(x)$　(ただし $x>0, y>1$)

[2] 合成函数の微分の公式を用いて $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = xy^3 - 2x^2,\ x = u+v,\ y = 2u-v.$

(2) $f(x,y) = \sin(x-y),\ x = u^2+v^2,\ y = 2uv.$

[3] 函数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

について次に答えよ.

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標変換して $r \to 0$ の極限を考えることにより, $f(x,y)$ が連続函数であることを示せ[1].

(2) 偏導函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ[2].

(3) (2) で得られた偏導函数の連続性を調べ, $f(x,y)$ の全微分可能性, C^1-級かどうかについて答えよ.

(4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ をそれぞれ求めよ.

---

[1] $(x,y) = (0,0)$ での連続性のみが問題となる. $(x,y) \neq (0,0)$ での連続性は式の形より明らかとしてよい.

[2] $(x,y) \neq (0,0)$ のときは与えられた式を機械的に偏微分すればよい. $(x,y) = (0,0)$ のときは定義に戻って計算する.

[4] $f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の C^2-級の函数とする. 函数 $g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$ を

$$g(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

で定めるとき[3], 等式

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{d^2 f}{dt^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{df}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

が成り立つことを示せ.

レポート問題

以下の問題の解答を **A4 の**レポート用紙もしくはコピー用紙 **1 枚** (裏面利用可, 2 枚目以上は無効) にまとめ, **6 月 4 日 (月)** の演習の時間のはじめに提出して下さい.

[C1] $\mathbb{R}^2$ 上の C^2-級函数 $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1) = -2$ を満たしているとする. いま, $\mathbb{R}^2$ 上の函数 $F(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$F(u,v) := f(u-v, u+v)$$

で定めるとき, 次に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}$ の $(u,v) = (2,-1)$ での値を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ の $(u,v) = (2,-1)$ での値を求めよ.

以上.

お知らせ

- 次回は **5 月 28 日 (月)** で, **線形代数**の演習を行います.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

[3] すなわち, $g(x,y)$ は $f(t)$ と $t = \sqrt{x^2+y^2}$ の合成函数である.

参考 (2 変数函数の連続性, 偏導函数, 全微分可能性, C^m-級函数)

- $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された 2 変数函数 $f(x,y)$ が D 内の**点** (a,b) **で連続**であるとは

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, y+k) = f(a,b)$$

が成り立つことである. ここで左辺の極限は (h,k) があらゆる方法 (直線上とは限らない) で $(0,0)$ に近づくときの極限を意味している. 連続性を示す方法のひとつとして, $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$ と極座標に直してから

$$\lim_{r\to 0} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) = f(a,b)$$

となることを示すというものがある (ただし万能ではない) . 函数 $f(x,y)$ が D 内のあらゆる点で連続なとき D **上で連続**であるという.

- 点 $(a,b) \in D$ における $f(x,y)$ の**変数** x **についての偏微分係数** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, **変数** y **についての偏微分係数** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ をそれぞれ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

で定義する[4]. これらの偏微分係数を D 上の函数とみなしたものをそれぞれ**変数** x **についての偏導函数** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, **変数** y **についての偏導函数** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ と呼ぶ.

- 2 変数函数 $f(x,y)$ の偏導函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が存在し, どちらも D 上で連続なとき, $f(x,y)$ は D 上で C^1**-級**であるという. 一般に, m 階までのあらゆる偏導函数が存在して, どれも D 上で連続なとき, $f(x,y)$ は D 上で C^m**-級**であるという. さらに, $f(x,y)$ が任意の自然数 m について C^m-級であるとき, C^∞**-級**であるという.

- 点 $(a,b) \in D$ において

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

を満たす定数 A, B が存在するとき, 函数 $f(x,y)$ は**点** (a,b) **で全微分可能** (もしくは単に**微分可能**) であるといい, D のあらゆる点で微分可能なとき D **上で全微分可能**であるという. このとき函数 $f(x,y)$ は x, y の各変数について偏微分可能で, $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ が成り立つ.

- 上記の事柄の関係は以下のとおり: 2 変数函数 $f(x,y)$ について

$$C^1\text{-級} \Longrightarrow \text{全微分可能} \Longrightarrow x, y \text{ の各変数について偏導函数が存在}$$
$$C^1\text{-級} \Longrightarrow \text{全微分可能} \Longrightarrow \text{連続}$$

が成り立つ. しかし, それぞれの逆は一般には成り立たず, また, 函数の連続性と偏導函数の存在 (連続とは限らない) の間に関係はない.

[4] 正確には右辺の極限値が定まるときに定義される.

参考 (偏微分の順序交換)

- $\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された函数 $f(x,y)$ について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ がともに連続函数となっているならば (とくに $f(x,y)$ が C^2-級であればよい)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$
が成り立つ. 一般に函数 $f(x,y)$ が C^m-級であれば, 高々 m 階の偏導函数は偏微分を行う変数の順番には依存しない.

参考 (合成函数の微分)

- 函数 $z = f(x,y)$ が微分可能な函数で, x, y が $\mathbb{R}$ 上の微分可能な函数 φ, ψ を用いて $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ と表されているとする:
$$\mathbb{R} \xrightarrow{(\varphi,\psi)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
このとき, 合成函数 $z(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ の微分について
$$\boxed{\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial z}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)}$$
が成り立つ. ここで, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t))$ は z を x と y の函数と思って x について偏微分したのち $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ を代入したものである[5]. $\dfrac{\partial z}{\partial y}(\varphi(t),\psi(t))$ についても同様である. 上の等式はしばしば $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ と略記される.

- 函数 $z = f(x,y)$ が微分可能な函数で, x, y が $\mathbb{R}^2$ 上の微分可能な函数 φ, ψ を用いて $x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v)$ と表されているとする:
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(\varphi,\psi)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
このとき, 合成函数 $z(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ の偏微分について
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial z}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial z}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial z}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial z}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{aligned}}$$
が成り立つ. これらの等式も, $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$ と略記される.

---

[5] $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t))$ と書いてもよい. このあたりの記法は統一されておらず, 文脈に合わせて理解する必要がある.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 3 回（逆井　2012 年 5 月 21 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] z を複素数とする. 函数 $f(z) = z^3 - 3z^2 + 1$ について次に答えよ.

(1) $z = x + y\sqrt{-1}$ (x, y は実数) とするとき, $f(z)$ の実部 $\mathrm{Re}(f(z))$, 虚部 $\mathrm{Im}(f(z))$ それぞれを x, y についての函数として表せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 \mathrm{Re}(f(z))}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{Re}(f(z))}{\partial y^2}$ と $\dfrac{\partial^2 \mathrm{Im}(f(z))}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{Im}(f(z))}{\partial y^2}$ をそれぞれ求めよ.

学籍番号 _____ 氏名 _____ _____

[2] 微分可能な函数 $z = f(x, y)$ において, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ とおくとき, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ のそれぞれを x, y, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

以上.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 3 回
演習課題解答

（逆井　2012 年 5 月 21 日出題）

小テスト解答

[1] (各 1 点)

(1) $\mathrm{Re}(f(z)) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 - 3xy^2 + 1,\ \mathrm{Im}(f(z)) = -6xy + 3x^2y - y^3.$

(2) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(x^3-3x^2+3y^2-3xy^2+1) = 6x-6,\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(x^3-3x^2+3y^2-3xy^2+1) = 6-6x$ より $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x^3-3x^2+3y^2-3xy^2+1) = 0.$ また, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(-6xy+3x^2y-y^3) = 6y,$ $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(-6xy+3x^2y-y^3) = -6y$ より $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(-6xy+3x^2y-y^3) = 0.$

[2] (2 点)

合成函数の微分の公式より,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

となる. ここで

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^u \cos v = x, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = e^u \sin v = y,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -e^u \sin v = -y, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = e^u \cos v = x$$

であるから,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}.$$

演習問題略解

[1] (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy^2}y^2\cos(x^2+y) - 2e^{xy^2}x\sin(x^2+y),$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2e^{xy^2}xy\cos(x^2+y) - e^{xy^2}\sin(x^2+y).$

(2) $\log_y(x) = \dfrac{\log x}{\log y}$ より, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x\log y},\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\log x}{y(\log y)^2}.$

[2] (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 4x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$ に注意して合成函数の微分の公式を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u+v, 2u-v)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u+v, 2u-v)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\
&= \{(2u-v)^3 - 4(u+v)\}\cdot 1 + 3(u+v)(2u-v)^2\cdot 2,\\
\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u+v, 2u-v)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u+v, 2u-v)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\
&= \{(2u-v)^3 - 4(u+v)\}\cdot 1 + 3(u+v)(2u-v)^2\cdot(-1).
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(x-y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x-y)$ に注意して合成函数の微分の公式を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, 2uv)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, 2uv)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\
&= \cos((u-v)^2)\cdot(2u) - \cos((u-v)^2)\cdot(2v),\\
\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, 2uv)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, 2uv)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\
&= \cos((u-v)^2)\cdot(2v) - \cos((u-v)^2)\cdot(2u).
\end{aligned}$$

[3] (1) $(x,y) \neq (0,0)$ での連続性は式の形より明らかなので, $(x,y) = (0,0)$ での連続性を調べればよい. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標変換して $r \to 0$ の極限を考えると,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta\,\frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2}\\
&= \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned}$$

となるが, $|\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)| = |\cos\theta\sin\theta\cos(2\theta)| \leq 1$ となるので, この極限値は 0 となり, $f(0,0)$ と等しい. よって $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ でも連続であることがわかる.

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ のときは

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

であり, $(x,y) = (0,0)$ のときは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

より, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ となる. 同様に計算すると, $(x,y) \neq (0,0)$ のときは

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

であり, $(x,y)=(0,0)$ のときは

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

より, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ となる.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ のいづれについても $(x,y)\neq(0,0)$ での連続性は式の形より明らかなので, $(x,y)=(0,0)$ での連続性を調べればよい. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と極座標変換して $r\to 0$ の極限を考えると,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\lim_{r\to 0}\frac{r\sin\theta(r^4\cos^4\theta+4r^4\cos^2\theta\sin^2\theta-r^4\sin^4\theta)}{r^4}\\
&=\lim_{r\to 0}r\sin\theta(\cos^4\theta+4\cos^2\theta\sin^2\theta-\sin^4\theta)\\
&=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\\
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta(r^4\cos^4\theta-4r^4\cos^2\theta\sin^2\theta-r^4\sin^4\theta)}{r^4}\\
&=\lim_{r\to 0}r\cos\theta(\cos^4\theta-4\cos^2\theta\sin^2\theta-\sin^4\theta)\\
&=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)
\end{aligned}$$

となるので, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はいづれも $(x,y)=(0,0)$ で連続である. 以上より $f(x,y)$ は C^1-級の函数であり, とくに微分可能である.

(4) 定義に戻って計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^5}{h^4}-0\right)=1,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)\\
&=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{-k^5}{k^4}-0\right)=-1.
\end{aligned}$$

[4] $t=\sqrt{x^2+y^2}$ として,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)&=\frac{df}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\partial t}{\partial x}(x,y)=\frac{df}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)&=\frac{df}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\partial t}{\partial y}(x,y)=\frac{df}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

である. ここで $\dfrac{df}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ は函数 $\dfrac{df}{dt}(t)$ に $t=\sqrt{x^2+y^2}$ を代入した函数である. これらをもう一度 x または y で偏微分して式を整理すればよい.