7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 2 回 （逆井　2012 年 5 月 7 日）

演習問題 (テーマ: 微分, 平均値の定理, テイラーの定理)

[1] 対数微分法を用いて $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x-4)}}$ の導函数を求めよ.

[2] ロピタルの定理を用いて次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{x}{x-1} \right)$

[3] $x = 0$ のまわりで函数

$$f(x) = e^x \sin x,$$
$$g(x) = \log(1 - x^2)$$

にテイラーの定理を適用し, それぞれを 7 次の項まで展開せよ.

[4] 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$ について次に答えよ.

(1) $f(x)$ が $x = 0$ でも連続となるように a の値を定めよ.

(2) (1) で定めた連続函数 $f(x)$ の導函数を求めよ.

[5] $f(x) = \tan^{-1} x$ とするとき, 以下に答えよ.

(1) $(x^2+1)f'(x) = 1$ を示せ.

(2) (1) の等式の両辺を n 回微分することにより,

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ. [ヒント: ライプニッツの公式.]

(3) $f(x)$ の $x = 0$ を中心とする 7 次までのテイラー展開を求めよ.

参考

1. (ロピタルの定理)　点 $a \in \mathbb{R}$ の近くで微分可能 (点 a では微分可能でなくてもよい) な函数 $f(x), g(x)$ について, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ で, $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ. なお, $a \in \mathbb{R}$ のかわりに ∞ もしくは $-\infty$ とした場合も同様のことが成り立つ.

2. (ライプニッツの公式)　函数の積の高階微分について

$$\{f(x)g(x)\}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

が成り立つ. ここで $\displaystyle\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$ である[1]. たとえば $m = 1, 2, 3, 4$ のとき

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}^{(1)} &= f(x)^{(1)}g(x) + f(x)g(x)^{(1)}, \\
\{f(x)g(x)\}^{(2)} &= f(x)^{(2)}g(x) + 2f(x)^{(1)}g(x)^{(1)} + f(x)g(x)^{(2)}, \\
\{f(x)g(x)\}^{(3)} &= f(x)^{(3)}g(x) + 3f(x)^{(2)}g(x)^{(1)} + 3f(x)^{(1)}g(x)^{(2)} + f(x)g(x)^{(3)} \\
\{f(x)g(x)\}^{(4)} &= f(x)^{(4)}g(x) + 4f(x)^{(3)}g(x)^{(1)} + 6f(x)^{(2)}g(x)^{(2)} \\
&\quad + 4f(x)g(x)^{(3)} + f(x)g(x)^{(4)}
\end{aligned}$$

となる.

以上.

お知らせ

- 次回は **5 月 14 日 (月)** で, **線形代数**の演習を行います.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

[1] 高校の数学で ${}_m\mathrm{C}_k$ と書いていたものです.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 2 回 （逆井　2012 年 5 月 7 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] $x > 0$ とし, 3 つの函数

$$f(x) = x^x$$
$$g(x) = x^{(x^x)}$$
$$h(x) = (x^x)^x$$

を考える.

(1) 函数 f, g, h の導函数をそれぞれ求めよ (計算結果を無理に整理する必要はありません).

(2) $\lim_{x \to 0+} f(x)$, $\lim_{x \to 0+} g(x)$, $\lim_{x \to 0+} h(x)$ をそれぞれ求めよ.

学籍番号 _____ 氏名 _____ _____

[2] $\mathbb{R}$ 上で定義された函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

について次に答えよ.

(1) $f(x)$ が $x = 0$ でも連続となるように a の値を定めよ. [答えのみでよい]

(2) (1) で定めた連続函数 $f(x)$ の導函数 $f'(x)$ を求めよ.

以上.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 2 回
演習課題解答

（逆井　2012 年 5 月 7 日出題）

小テスト解答

[1] (3 点)

(1) $f(x) > 0$ となることは明らか. 対数微分法を用いると,

$$f'(x) = f(x)(\log(f(x)))' = x^x(x\log x)' = x^x(1+\log x).$$

$g(x) > 0$ についても同様に対数微分法を用いると,

$$g'(x) = g(x)(\log(g(x)))' = x^{(x^x)}(x^x\log x)' = x^{(x^x)}\{(x^x)'\log x + x^x(\log x)'\}.$$

ここで $(x^x)' = x^x(1+\log x)$ であることを用いると

$$g'(x) = x^{(x^x)}\{(x^x)(1+\log x)\log x + x^x x^{-1}\} = x^{(x^x)}\{x^x\log x + x^{x-1} + x^x(\log x)^2\}.$$

$h(x) > 0$ についても同様に対数微分法を用いると,

$$h'(x) = h(x)(\log(h(x)))' = (x^x)^x(x^2\log x)' = (x^x)^x(2x\log x + x).$$

(2) $f(x) > 0$ なので対数をとって考えてよい. $\log f(x) = x\log x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ より $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ となる. これを用いると

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = 0^1 = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} h(x) = 1^0 = 1$$

が従う.

[2] (各 1 点)

(1) $\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x^2|$ より $\lim_{x\to 0}|f(x)| \le \lim_{x\to 0}|x^2| = 0$ となる. これより $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ が従うので, $a = 0$ とすれば $f(x)$ は $x = 0$ でも連続となる.

(2) $x \neq 0$ においては $f(x)$ は明らかに微分可能であって,

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

である. $x = 0$ における微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{h}\right) = 0.$$

よって求める導函数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

となる.

注意 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ で定めると, この数列は明らかに 0 に収束するが, すべての n について $f'(a_n) = -1$ であるから, $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$ は成り立たないことがわかる. よって, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない.

演習問題略解

[1] $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}}(x-4)^{-\frac{1}{2}}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(x+1)^{\frac{1}{2}}\}'(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}}(x-4)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + (x+1)^{\frac{1}{2}}\{(x+2)^{\frac{1}{2}}\}'(x-3)^{-\frac{1}{2}}(x-4)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + (x+1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}\{(x-3)^{-\frac{1}{2}}\}'(x-4)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + (x+1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}}\{(x-4)^{-\frac{1}{2}}\}' \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}}(x-4)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{-\frac{1}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}}(x-4)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{-\frac{3}{2}}(x-4)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}}(x-4)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right). \end{aligned}$$

注意 最後の式を書き換えると,

$$\frac{-5x^2 + 10x + 25}{(x-3)(x-4)\sqrt{(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)}}$$

となる.

[2] (1) ロピタルの定理を 2 回使って計算すればよい.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{-2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^3 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)'}{(\cos^2 x-\cos^3 x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin x}{-2\cos x\sin x + 3\cos^2 x\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{-2+3\cos x} = 2.\end{aligned}$$

(2) 2 項をまとめたものに対してロピタルの定理を適用すればよい.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{x}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\log x}{(x-1)\log x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-x\log x)'}{\{(x-1)\log x\}'}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-\log x}{\log x + x^{-1}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-x\log x}{x\log x + x - 1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(-x\log x)'}{(x\log x + x - 1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{-\log x - 1}{\log x + 2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

[3] $f(x)$ については

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x\sin x + e^x\cos x,\\ f^{(2)}(x) &= 2e^x\cos x,\\ f^{(3)}(x) &= 2e^x\cos x - 2e^x\sin x,\\ f^{(4)}(x) &= -4e^x\sin x = -4f(x)\end{aligned}$$

より周期性に注意して公式を適用すればよく,

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \frac{f^{(8)}(\theta x)}{8!}x^8 \quad (0<\theta<1)^2.$$

$g(x)$ については $g(x) = \log(1-x) + \log(1+x)$ と分解してから導函数を計算すると,

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\left\{\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x-1)^n}\right\}$$

となることがわかるので

$$g(x) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{g^{(8)}(\theta x)}{8!}x^8 \quad (0<\theta<1).$$

[2] テイラー展開の剰余項に現れる θ は x に依存しており, 定数ではないことに注意. θ のかわりに $\theta(x)$ と書く方が良いかもしれない.

[4] (1) $1-\cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ より,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

となるので, $a=\dfrac{1}{2}$ とすればよい.

(2) $x\neq 0$ のとき, 通常の導函数の計算により

$$f'(x) = \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)' = \frac{x^2\sin x - 2x(1-\cos x)}{x^4} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$

となる. $x=0$ のときは定義に戻ると

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1-\cos h}{h^2} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{2-2\cos h - h^2}{2h^3}$$

となるが, ここでテイラーの定理により

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{\cos(\theta h)}{4!}h^4 \qquad (0<\theta<1)$$

と書けるので

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{2-2\cos h - h^2}{2h^3} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h^3}\left\{2 - 2\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{\cos(\theta h)}{4!}h^4\right) - h^2\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\cos(\theta h)h^4}{24h^3} = \lim_{h\to 0}\frac{-\cos(\theta h)h}{24} = 0.\end{aligned}$$

よって $f'(0)=0$ である.

[5] (1) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ より明らか.

(2) $(x^2+1)' = 2x$, $(x^2+1)'' = 2$, $(x^2+1)^{(j)} = 0$ $(j\geq 3)$ であることに注意して, $(x^2+1)f'(x)=1$ の両辺をライプニッツの公式を使って n 回微分すればよい.

(3) 等式 $(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$ に $x=0$ を代入すると, $f^{(n+1)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$ が得られる. この式と $f(0)=0$, $f'(0)=1$ を用いると帰納的に

$$f^{(2m)} = 0, \qquad f^{(2m+1)} = (-1)^m(2m)! \quad (m \text{ は自然数})$$

となることがわかる. よって求めるテイラー展開は

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{f^{(8)}(\theta x)}{8!}x^8 \quad (0<\theta<1).$$