7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 1 回（逆井　2012 年 4 月 16 日）

演習問題 (テーマ: 逆三角関数)

[1]　3 つの関数

$$\begin{aligned} y &= \sin x \quad (-\pi/2 \le x \le \pi/2), \\ y &= \cos x \quad (0 \le x \le \pi), \\ y &= \tan x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2) \end{aligned}$$

のグラフを描き, それぞれ逆関数

$$x = \sin^{-1} y, \qquad x = \cos^{-1} y, \qquad x = \tan^{-1} y$$

が存在することを確認せよ (**逆三角関数**[1] と呼ぶ) . また, (x と y を入れ替えた) 関数

$$y = \sin^{-1} x, \qquad y = \cos^{-1} x, \qquad y = \tan^{-1} x$$

のグラフを xy-平面に描き, その定義域と値域を答えよ.

[2] (1) $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \sin^{-1}\dfrac{4}{5}$ の値を求めよ.

(2) 等式 $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを周りの人に説明せよ.

[3] (1) 逆三角関数 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ.

(2) 置換積分法と (1) の結果を用いて次の不定積分を計算せよ.

$$(a) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad\qquad (b) \quad \int \frac{dx}{x^2+4}$$

[1] ひどく紛らわしいが, $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ についている -1 は逆数の意味でないことに注意. $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書くこともある.

[4] $\sin^{-1} x + \sin^{-1} \dfrac{5}{13} = \sin^{-1} \dfrac{3}{5}$ を満たす x の値を求めよ.

参考 (逆関数の導関数)

- $\mathbb{R}$ の部分集合 A 上の関数 $y = f(x)$ が単射 (1 対 1) であるとき, 値域 $f(A)$ の各元 y に対して $f(x) = y$ を満たすただ一つの元 $x \in X$ を対応させる関数 $f^{-1} : f(A) \to A$ が定義される. 関数 f^{-1} を f の**逆関数**という.

- 微分可能な関数 $y = f(x)$ が微分可能な逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を持つとき,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$$

が成り立つ. ただし, 右辺の $\dfrac{dy}{dx}$ は x の関数になっているため, y についての関数に直す必要がある.

例 $y = e^x$ は $x = \log y$ を逆関数に持つ. このとき

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{\left(\dfrac{de^x}{dx}\right)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

よって $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}$ となる (普段の関数の書き方と同じように x を変数とする形に直した).

以上.

お知らせ

- 次回の演習は **4 月 23 日 (月)** で, **線形代数**の演習を行います.

- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします (更新忘れなどを防ぐため, V1 クラスのページのみを使用します). 教員検索で「逆井」と入力すればすぐに該当ページにたどり着けると思います. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 1 回（逆井　2012 年 4 月 16 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] 倍角の定理を利用して次の値を求めよ.

$$(1)\quad \tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right) \qquad (2)\quad \tan\left(4\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$$

学籍番号 _____ 氏名 _____ _____

[2] $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ の値を求めよ.

[ヒント: 求める値の tan を考え, 加法定理を使うとよい.]

以上.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 1 回
演習課題解答

（逆井　2012 年 4 月 16 日出題）

小テスト解答

[1] (各 1 点)

(1) $$\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)=\frac{2\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)}{1-\left(\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)\right)^2}=\frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{12}.$$

(2) $$\tan\left(4\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)=\frac{2\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)}{1-\left(\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)\right)^2}=\frac{2\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{120}{119}.$$

[2] (2 点)

求める値を α とおくと,

$$\begin{aligned}\tan\alpha=\tan\left(4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}\right)&=\frac{\tan\left(4\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)-\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{239}\right)}{1+\tan\left(4\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{239}\right)}\\&=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=\frac{120\cdot239-119}{119\cdot239+120}=\frac{(119\cdot239+239)-119}{119\cdot239+120}\\&=\frac{119\cdot239+120}{119\cdot239+120}=1.\end{aligned}$$

よって $\tan\alpha=1$. いま, $0<\tan^{-1}\frac{1}{5}<\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$, $0<\tan^{-1}\frac{1}{239}<\tan^{-1}\frac{1}{5}$ であるから, $0<4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}<\pi$ となる. この範囲で $\tan\alpha=1$ となるときを考えると, $\alpha=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$ となることがわかる.

注意　今回の小テストで証明した等式は**マチンの公式**と呼ばれている. この公式と $\tan^{-1}x$ のテイラー級数

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots\qquad(-1<x\leq1)$$

を用いると, 円周率 π の近似値を効率よく求めることができる.

演習問題略解

[2] (1) 3 辺の長さが $3, 4, 5$ の直角三角形を描き, $\sin^{-1}$ の定義と比べてみると求める値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることがわかる.

[3] (1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

(2) (a) $\sin^{-1} x$ の導関数を利用すれば,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2/4}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-(x/2)^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{2} + C$$

となる (C は積分定数).

(b) $\tan^{-1} x$ の導関数を利用すれば,

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{dx}{4(x^2/4+1)} = \int \frac{dx}{4\{(x/2)^2+1\}} = \frac{\tan^{-1}\dfrac{x}{2}}{2} + C$$

となる (C は積分定数).

[4] $\alpha = \sin^{-1}\dfrac{5}{13}$, $\beta = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ とおくと $\sin^{-1}$ の定義より $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}, \qquad \cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

とくに $0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であり $-\dfrac{\pi}{2} < \beta - \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. いま $\sin^{-1} x = \beta - \alpha$ であるから,

$$x = \sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{16}{65}.$$