7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 7 回 (逆井　2012 年 7 月 16 日)

演習問題 (テーマ: 重積分の変数変換公式, 面積と体積)

[1] (1) a, b をどちらも 0 でない定数とする. 集合 $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ における二重積分

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy$$

の値を求めよ (符号に注意!).

(2) 三重積分 $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+|z|\leq 1} x^2\, dxdydz$ を, 空間の円柱座標変換

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z \qquad (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を用いて解け.

[2] (1) 二重積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq y} y^2\, dxdy$ を点 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする極座標変換

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta + \frac{1}{2}$$

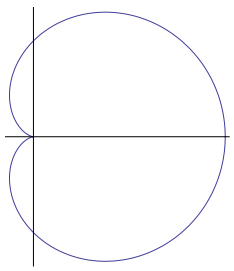
を用いて計算せよ.

(2) (1) の二重積分を原点を中心とする通常の極座標変換

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

を用いて計算せよ (変数 r, θ の動く範囲を明確にせよ).

[3] 極方程式で表されたカージオイド: $r = a(1+\cos\theta)$ (ただし $a > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$) の囲む $\mathbb{R}^2$ 内の図形を D とする.



(1) 極座標を用いると D はどのように表されるか答えよ (変数 r, θ の動く範囲を明確にせよ).

(2) D の面積を定義式

$$\iint_D 1\, dxdy$$

から変数変換公式を用いて求めよ.

[4] $a > 0$ とする. $\mathbb{R}^3$ における 2 つの円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y^2 + z^2 \leq a^2$ の共通部分 V の体積を求めよ.

参考 (重積分の変数変換公式)

- $\mathbb{R}^n$ の中の領域 D において, 変数 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ から変数 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ への変換が C^1-級関数 $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ によって与えられているとき, 行列式

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

をその変数変換の**ヤコビアン** (Jacobian) という.

- 重積分の変数変換公式: 上のような変数変換の下で, 領域 D が領域 E と 1 対 1 に対応し, E 上でヤコビアン $\dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$ が 0 にならないとする[1]. このとき, 等式

$$\begin{aligned} &\int\!\!\cdots\!\!\int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \\ &\quad = \int\!\!\cdots\!\!\int_E f(x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n)) \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right| dy_1 \cdots dy_n \end{aligned}$$

が成り立つ.

注意 上の公式において $\left| \dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right|$ はヤコビアン (すでに行列式をとったもの) の**絶対値**を意味している. 正方行列 A の行列式を表す $|A|$ と混同しないように気をつける必要がある.

以上.

お知らせ

- 次回は **7 月 23 日 (月)** (最終回) で, 線形代数と微分積分の演習を並行して行います.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

[1] 極座標変換のときの原点など, 領域の境界部分 (厳密な取り扱いは述べない) などでこの条件が満たされないことがあるが, そのような集合が十分に痩せていれば気にしなくてよい (教科書 93 ページを参照).

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 7 回（逆井　2012 年 7 月 16 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする. 次の二重積分を

$$x = r\sin\theta, \qquad y = r\cos\theta \qquad (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と変数変換して計算せよ.

$$\iint_D \log(1 + x^2 + y^2)\, dxdy.$$

学籍番号 _____ 氏名 _____ _____

[2] $\mathbb{R}^3$ における次の領域 D の体積を求めよ:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}.$$

以上.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 7 回
演習課題解答

（逆井　2012 年 7 月 16 日出題）

小テスト解答

[1] (2 点)

$\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = -r$ であるから, 変数変換公式より

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} \log(1+r^2)|-r|\,drd\theta = \left\{\int_0^1 r\log(1+r^2)\,dr\right\}\left\{\int_0^{2\pi} d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[(1+r^2)\log(1+r^2)-(1+r^2)\right]_{r=0}^{1}\cdot(2\pi) = (2\log 2-1)\pi
\end{aligned}
$$

となる. (変数変換時にヤコビアンの**絶対値**をとることに注意.)

[2] (2 点)

$0 \le \sqrt{z} \le 1-\sqrt{x}-\sqrt{y}$ より, D の体積は

$$
\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1} (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\,dxdy
$$

で与えられることに注意すると, あとは $x=u^2$, $y=v^2$ と変数変換して計算すればよく, 求める体積は

$$
\begin{aligned}
\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1} (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\,dxdy &= \iint_{\substack{u+v\le 1\\ u\ge 0, v\ge 0}} (1-u-v)^2\cdot 4uv\,dudv \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^{1-u} (1-u-v)^2\cdot 4uv\,dv\right\} du \\
&= \int_0^1 \frac{u(1-u)^4}{3}\,du = \frac{1}{90}.
\end{aligned}
$$

別解　$z=t$ における D の切り口の面積を $0\le z\le 1$ の範囲で積分することを考えると, D の体積は

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left\{\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1-\sqrt{z}} 1\,dxdy\right\} dz &= \int_0^1 \left\{\iint_{\substack{u+v\le 1-\sqrt{z}\\ u\ge 0, v\ge 0}} 4uv\,dudv\right\} dz \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^{1-\sqrt{z}} 2u\left(\int_0^{1-\sqrt{z}-u} 2v\,dv\right) du\right\} dz \\
&= \int_0^1 \left\{\int_0^{1-\sqrt{z}} 2u(1-\sqrt{z}-u)^2\,du\right\} dz \\
&= \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{z})^4}{6} dz \overset{(z=w^2)}{=} \int_0^1 \frac{(1-w)^4}{3}\,w\,dw = \frac{1}{90}.
\end{aligned}
$$

演習問題略解

[1] (1) $x = |a|r\cos\theta,\, y = |b|r\sin\theta\ (0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$ と変数変換すると,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = |ab|r$$

より

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy &= \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} r^2|abr|\, drd\theta = |ab| \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} r^3\, drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^3\, dr\right) d\theta = \frac{\pi|ab|}{2}.\end{aligned}$$

(2) 円柱座標変換のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$ となる. いま,

$$E = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \ge 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r^2 + |z| \le 1\}$$

とすると

$$\begin{aligned}\iiint_{x^2+y^2+|z|\le 1} x^2\, dxdydz &= \iiint_E r^2\cos^2\theta|r|\, drd\theta dz \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\right)\left\{\int_{-1}^1\left(\int_0^{\sqrt{1-|z|}} r^3\, dr\right) dz\right\} \\ &= \pi\cdot\frac{1}{6} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

[2] (1) $D = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\ \right\}$ であるから,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta + \frac{1}{2} \qquad \left(0 \le r \le \frac{1}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi\right)$$

と点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を中心とする極座標変換をすると, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ より

$$\iint_D y^2\, dxdy = \iint_{\substack{0\le r\le\frac{1}{2}\\ 0\le\theta\le 2\pi}} \left(r\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 |r|\, drd\theta = \frac{5\pi}{64}.$$

(2) 原点を中心とする極座標変換を考えると積分範囲は

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leq y} y^2\,dxdy &= \iint_E (r^2\sin^2\theta)|r|\,drd\theta = \int_0^\pi \sin^2\theta \left(\int_0^{\sin\theta} r^3\,dr\right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin^6\theta}{4}\,d\theta = \frac{5\pi}{64}\end{aligned}$$

となる. 最後の定積分は漸化式

$$\int_0^\pi \sin^n\theta\,d\theta = \frac{n-1}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta\,d\theta \qquad (n \geq 2)$$

を用いるとよい.

[3] (1) 図形 D を極座標で表示すると, r と θ は

$$E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq a(1+\cos\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

の範囲を動く.

(2) 変数変換公式より求める面積は

$$\begin{aligned}\iint_D 1\,dxdy &= \iint_E r\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1+\cos\theta)^2}{2}\,d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}.\end{aligned}$$

[4] 求める V の体積は $\dfrac{16a^3}{3}$. 詳しくは教科書 101 ページの問 14 を参照.

<u>別解</u> $-a \leq y \leq a$ の範囲で y を固定すると, V において x と z は

$$E = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\sqrt{a^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2-y^2},\ -\sqrt{a^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2-y^2}\right\}$$

の正方形領域を動く. よって求める体積は

$$\iiint_V 1\,dxdydz = \int_{-a}^a \left(\iint_E 1\,dxdz\right) dy = \int_{-a}^a 4(a^2-y^2)\,dy = \frac{16a^3}{3}.$$