7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 6 回 （逆井　2012 年 7 月 2 日）

演習問題 (テーマ: 広義積分, 重積分)

[1] 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \quad \left(= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 1-}} \int_\varepsilon^\delta \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \right)$$

の値を計算せよ.

[2] λ を実数とする. 広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\lambda}$ の収束, 発散を調べよ.

[ヒント: 被積分函数の原始函数を考えよ.]

[3] $f(x,y)$ を連続函数とするとき, 次の重積分の積分順序を変更せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 \left\{ \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy \right\} dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{2y-2y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right\} dy$

[4] $0 < t < 1$ に対し, D_t を 4 直線 $y=0,\ x=t,\ x=1,\ y=2x$ が囲む四角形とする. このとき, 重積分

$$I_t = \iint_{D_t} \frac{ye^x}{x}\,dxdy$$

について次に答えよ.

(1) I_t を, x について先に積分する形の累次積分, y について先に積分する形の累次積分それぞれの形で表せ.

(2) I_t の値を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} I_t$ を求めよ.

参考 (累次積分による重積分の計算)

- $\mathbb{R}^2$ の領域 D が区間 $[a,b]$ 上の連続函数 $\varphi(x), \psi(x)$ を用いて

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

と表されているとする. ただし, 区間 $[a,b]$ 上で常に $\varphi(x) \leq \psi(x)$ が成り立っているとする. このとき D 上の連続函数 $f(x,y)$ に対して

(1) $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ は $[a,b]$ 上の連続函数,

(2) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$

が成り立つ. このように重積分を 1 変数の積分を繰り返し行う形で表したものを**累次積分**という.

- 上で述べたことは x と y の役割を入れ替えても成立する. とくに領域 D が区間 $[c,d]$ 上の連続函数 $\xi(y), \eta(y)$ を用いて

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \xi(y) \leq x \leq \eta(y)\}$$

とも表すことができる場合 ($[c,d]$ 上で $\xi(y) \leq \eta(y)$ とする),

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx \\ &= \int_c^d \left\{ \int_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy\end{aligned}$$

が成り立つ (大雑把にいうと, 領域 D を "縦線の集まり" と見るか, "横線の集まり" と見るかの違いであり, どちらで見ても積分結果は同じになるということである). 第 2 式を第 3 式の形に直す操作やその逆操作を**積分順序の変更**という.

以上.

お知らせ

- 次回は **7 月 9 日 (月)** で, **線形代数**の演習を行います.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 6 回（逆井　2012 年 7 月 2 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{5x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

が収束するか調べ, 収束するならばその収束値を求めよ.

学籍番号 _____ 氏名 _____ _____

[2] $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ とするとき, 重積分

$$\iint_D |\cos(x+y)|\, dxdy$$

を計算せよ.

以上.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 6 回
演習課題解答

（逆井　2012 年 7 月 2 日出題）

小テスト解答

[1] (2 点)

部分分数分解して計算すればよい.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+3}\right)dx \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\left[3\log(x+1)-\log(x+2)-2\log(x+3)\right]_0^\lambda \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\left[\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+2\log\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\right]_0^\lambda \\
&= -\log\frac{1}{2}-2\log\frac{1}{3} = \log 2+2\log 3
\end{aligned}
$$

注意　部分分数分解をする際に,

$$
\frac{5x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}
$$

とおいて分母を払うと等式

$$
5x+11 = A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)
$$

が得られるが, ここで右辺を展開して係数比較に持ち込むより $x=-1,-2,-3$ を代入した方が素早く

$$
A=3, \qquad B=-1, \qquad C=-2
$$

と計算することができる.

[2] (2 点)

$$
(\text{与式}) = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}|\cos(x+y)|\,dx\right\}dy
$$

である. いま, y を固定したとき, $|\cos(x+y)|$ は π を周期とする周期函数であることに注意すると,

$$
\int_0^{2\pi}|\cos(x+y)|\,dx = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx = 4
$$

であるから,

$$
\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}|\cos(x+y)|\,dx\right\}dy = \int_0^{2\pi}4\,dy = 8\pi.
$$

演習問題略解

[1] $x(1-x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 1-}} \int_\varepsilon^\delta \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 1-}} \int_\varepsilon^\delta \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 1-}} \int_\varepsilon^\delta \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\,dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 1-}} \left[\sin^{-1}(2x-1)\right]_\varepsilon^\delta \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 1-}} \left(\sin^{-1}(2\delta-1) - \sin^{-1}(2\varepsilon-1)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

[2] $\lambda \neq 1$ のとき,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\lambda} = \left[\frac{1}{1-\lambda}(\log x)^{1-\lambda}\right]_2^\infty$$

なので, 積分は $\lambda > 1$ で収束し, $\lambda < 1$ で発散する. $\lambda = 1$ のときは,

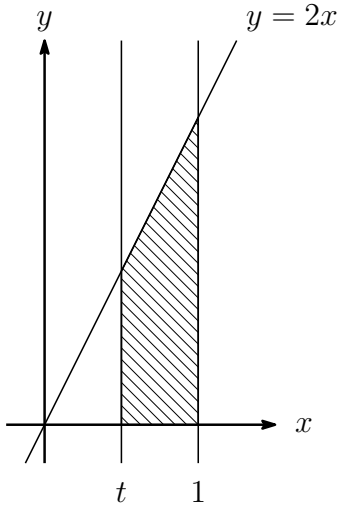
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x} = [\log(\log x)]_2^\infty$$

であるから, 積分は発散する.

[3] (1) $\displaystyle\int_0^4 \left\{\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\right\} dy$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{x^2}^{\frac{1-\sqrt{1-2x}}{2}} f(x,y)\,dy + \int_{\frac{1+\sqrt{1-2x}}{2}}^1 f(x,y)\,dy\right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy\right\} dx$

[4] 領域 D は右下図の斜線部分である.



(1) I_t を x について先に積分する形の累次積分で表すと

$$I_t = \int_0^{2t} \left(\int_t^1 \frac{ye^x}{x}\, dx \right) dy + \int_{2t}^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 \frac{ye^x}{x}\, dx \right) dy$$

となり, y について先に積分する形の累次積分で表すと

$$I_t = \int_t^1 \left(\int_0^{2x} \frac{ye^x}{x}\, dy \right) dx$$

となる.

(2) I_t の値を求めるには, 後者を用いればよく,

$$I_t = \int_t^1 \frac{e^x}{x} \left(\int_0^{2x} y\, dy \right) dx = \int_t^1 \frac{e^x}{x}(2x^2)\, dx = 2\int_t^1 xe^x\, dx = 2\Big[xe^x - e^x\Big]_t^1$$
$$= (2-2t)e^t.$$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} I_t = \lim_{t\to 0+} (2-2t)e^t = 2.$

レポート問題解答 (6 月 18 日出題)

[C2] (1) $t-x=\sqrt{x^2+2}$ と移項してから両辺を 2 乗して整理すると，$x=\dfrac{t^2-2}{2t}$ となる．これを t について微分すると，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+2}{2t^2}$ が得られる．これより，$\sqrt{x^2+2}=t-x=t-\dfrac{t^2-2}{2t}=\dfrac{t^2+2}{2t}$. よって

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{t^2+2}{2t}\cdot\frac{t^2+2}{2t^2}\,dt\\ &= \int \frac{t^4+4t^2+4}{4t^3}\,dt\\ &= \int \left(\frac{t}{4}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right)\,dt\\ &= \frac{t^2}{8}+\log|t|-\frac{1}{2t^2}\\ &= \frac{(x+\sqrt{x^2+2})^2}{8}+\log(x+\sqrt{x^2+2})-\frac{1}{2(x+\sqrt{x^2+2})^2}\end{aligned}$$

となる (積分定数は省略). ここで, $x+\sqrt{x^2+2}>0$ であることに注意. また, 上の積分結果をもう少し整理すると

$$\frac{x\sqrt{x^2+2}}{2}+\log(x+\sqrt{x^2+2})$$

となる.

(2) $t=\tan x$ とおくと, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$ となるので,

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x+a\sin^2 x}=\int \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}+\frac{at^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+at^2}$$

いま $a>0$ であるとすると,

$$\int\frac{dt}{1+at^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}(\sqrt{a}t)+C$$

となり (C は積分定数), 求める積分は $\dfrac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}(\sqrt{a}\,\tan x)+C$ となる. 一方で, $a<0$ のときは部分分数分解をして計算すると,

$$\begin{aligned}\int\frac{dt}{1+at^2} &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sqrt{-a}\,t}+\frac{1}{1+\sqrt{-a}\,t}\right)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{-a}}\log|1-\sqrt{-a}\,t|+\frac{1}{\sqrt{-a}}\log|1+\sqrt{-a}\,t|\right)+C\\ &= \frac{1}{2\sqrt{-a}}\log\left|\frac{1+\sqrt{-a}\,t}{1-\sqrt{-a}\,t}\right|+C\end{aligned}$$

となるので (C は積分定数), 求める積分は $\dfrac{1}{2\sqrt{-a}}\log\left|\dfrac{1+\sqrt{-a}\,\tan x}{1-\sqrt{-a}\,\tan x}\right|+C$.