7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 5 回（逆井　2012 年 6 月 18 日）

演習問題 (テーマ: 有理函数の部分分数分解, 1 変数関数の原始関数)

[1]　次の関数の原始関数を求めよ.

[ヒント: 逆三角関数の微分や置換積分法, 部分積分法を利用せよ.]

(1) x^2e^{-x}　　(2) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$　　(4) $\tanh x$

[2]　$p(x)$ を**実係数** 1 変数多項式とするとき, 次に答えよ.

(1) 複素数 $z = a + b\sqrt{-1}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ が $p(z) = 0$ を満たすならば, その複素共役 $\overline{z} = a - b\sqrt{-1}$ もまた $p(\overline{z}) = 0$ を満たすことを示せ ($z, \overline{z}$ を多項式 $p(x)$ の**根**という).

(2) 複素数 z とその複素共役 $\overline{z}$ を根にもつような実係数 2 次多項式をひとつ書け.

(3) 実係数多項式 $p(x)$ は, 実数 $a, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ たちを用いて

$$p(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{n_1}(x^2+\beta_2x+\gamma_2)^{n_2}\cdots(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{n_l}$$

の形で表されることを示せ. ただし, α_i や組 (β_j, γ_j) たち $(1 \le i \le k, 1 \le j \le l)$ は互いに異なるとし, かつ $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ であるとする.

[3]　次の有理函数を部分分数分解し, その原始函数を求めよ.

(1) $\dfrac{x^2}{x^2+x-6}$　　(2) $\dfrac{x^2-3}{x^3-4x^2+5x-2}$

[4]　(1) 不定積分 $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$ について, $n \neq 0$ のとき I_n を I_{n-2} を用いて表せ (すなわち漸化式を導け). ただし $n < 0$ のとき $\cos^n x$ は $\dfrac{1}{\cos^{-n} x}$ を表すものとする.

(2) (1) の漸化式を用いて $\cos^4 x, \cos^5 x, \dfrac{1}{\cos^4 x}, \dfrac{1}{\cos^5 x}$ の不定積分を求めよ.

参考 (有理函数の部分分数分解)

実係数多項式 $f(x), g(x)$ を用いて $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ と表された有理函数は, 次のようにして部分分数分解することができる.

(1) 分子 $g(x)$ の次数が分母 $f(x)$ の次数以上となっているときは, 多項式の割り算を用いて $\dfrac{g(x)}{f(x)} = h(x) + \dfrac{g_0(x)}{f(x)}$ という形にする. ここで $h(x), g_0(x)$ は多項式であって, $g_0(x)$ の次数は $f(x)$ の次数より小さい.

(2) 分母 $f(x)$ を問題 **[1]** (3) で見たように

$$f(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{n_2}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{n_l}$$

の形で表しておく. ただし α_i や組 (β_j, γ_j) たち $(1 \le i \le k, 1 \le j \le l)$ は互いに異なるとし, かつ $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ であるとする.

(3) 未知数 a_{is}, b_{jt}, c_{jt} を用いて等式 (恒等式)

$$\frac{g_0(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{m_i}\frac{a_{is}}{(x-\alpha_i)^s} + \sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{n_j}\frac{b_{jt}x + c_{jt}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^t}$$

を考えると, a_{is}, b_{jt}, c_{jt} は**ただ一通りに**定まる (分母を払ってから x にいくつかの具体的な数を代入して関係式を見つけていく).

レポート問題

以下の問題の解答を **A4 の**レポート用紙もしくはコピー用紙 **1 枚** (裏面利用可, 2 枚目以降は無効) にまとめ, **7 月 2 日 (月)** の演習の時間のはじめに提出して下さい.

[C2] 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x + a\sin^2 x}$ (ただし $a \neq 0$)

[ヒント: (1) $t = \sqrt{x^2+2} + x$ と置いて置換積分. (2) $t = \tan x$ と置いて置換積分]

以上.

お知らせ

- 次回は **6 月 25 日 (月)** で, **線形代数**の演習を行います.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 5 回（逆井　2012 年 6 月 18 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] 逆三角函数 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ それぞれについて, その原始函数を求めよ.

学籍番号 _____ 氏名 _____ _____

[2] $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ.

以上.

7 類 V クラス 微分積分学演習第一 第 5 回
演習課題解答

（逆井　2012 年 6 月 18 日出題）

小テスト解答

[1] (2 点)

どれも部分積分法を使って計算すればよい．C を積分定数として，

$$\int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\begin{aligned}\int \cos^{-1} x\,dx &= \int \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x\right)\,dx \\ &= \frac{\pi x}{2} - x\sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C,\end{aligned}$$

$$\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{\log(1+x^2)}{2} + C.$$

[2] (2 点)

$\dfrac{1}{x^3+1}$ の部分分数分解は

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$

で与えられる. よって求める不定積分は

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx \\ &= \frac{\log|x+1|}{3} - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} + C \\ &= \frac{\log|x+1|}{3} - \frac{\log(x^2-x+1)}{6} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + C \\ &= \frac{\log|x+1|}{3} - \frac{\log(x^2-x+1)}{6} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} + C \\ &= \frac{\log|x+1|}{3} - \frac{\log(x^2-x+1)}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

となる (C は積分定数).

演習問題略解

[1] 積分定数は省略する.

(1) 部分積分を 2 回使って計算すると,

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x})\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$$
$$= -x^2e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - 2\int(-e^{-x})\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \tan^{-1}(1+x).$

(3) $x = 2t$ と置換すると, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} t = \sin^{-1}\frac{x}{2}.$

(4) $\dfrac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x}$ であるから, $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \log(e^x + e^{-x}).$

[3] (1) $\dfrac{x^2}{x^2+x-6} = 1 - \dfrac{x-6}{x^2+x-6} = 1 - \dfrac{9}{5(x+3)} + \dfrac{4}{5(x-2)}$ より求める原始函数は

$$\frac{x^2}{x^2+x-6}\,dx = x - \frac{9}{5}\log|x+3| + \frac{4}{5}\log|x-2| + C$$

である (C は積分定数).

(2) $\dfrac{x^2-3}{x^3-4x^2+5x-2} = \dfrac{x^2-3}{(x-1)^2(x-2)} = \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-2}$ より求める原始函数は

$$\int \frac{x^2-3}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx = \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx + \log|x-2| = -\frac{2}{x-1} + \log|x-2| + C$$

である (C は積分定数).

[4] (1) 部分積分法を用いると,

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1)\cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\,dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

となる. これを整理すると, $n \neq 0$ で成立する漸化式

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を得る.

(2) $I_0 = \displaystyle\int \cos^0 x\, dx = \int dx = x$, $I_1 = \displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x$ であることに注意して (1) の漸化式を用いると,

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2} I_0\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8} x, \\
I_5 &= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3 = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} I_1\right) \\
&= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x
\end{aligned}$$

となる. 一方で, 上の漸化式を I_{n-2} に関して整理すると, $n \neq 1$ で成立する漸化式

$$I_{n-2} = -\frac{1}{n-1}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n}{n-1} I_n$$

を得る. いま $I_{-2} = \displaystyle\int \cos^{-2} x\, dx = \tan x$,

$$\begin{aligned}
I_{-1} &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}(-\log|1-\sin x| + \log|1+\sin x|) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|
\end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
I_{-4} &= -\frac{1}{-3}\cos^{-3} x \sin x + \frac{-2}{-3} I_{-2} = \frac{1}{3}\cos^{-3} x \sin x + \frac{2}{3}\tan x, \\
I_{-5} &= -\frac{1}{-4}\cos^{-4} x \sin x + \frac{-3}{-4} I_{-3} \\
&= \frac{1}{4}\cos^{-4} x \sin x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{-2}\cos^{-2} x \sin x + \frac{-1}{-2} I_{-1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos^{-4} x \sin x + \frac{3}{8}\cos^{-2} x \sin x + \frac{3}{16}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|
\end{aligned}$$

となることがわかる.