2012 年 6 月 7 日 (2012 年 6 月 7 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 8

お知らせ

- 来週 6 月 14 日に中間試験を実施いたします．5 月 24/31 日の予告に従って受験してください．
- 中間試験のため，今回は提出物を受け付けません．

前回までの訂正

- 板書の誤り：最初の補足で p. 80 # 2.21 ⇒ p. 50 # 2.21.
- 板書の誤り：

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 + c\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ c\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 + c\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ c\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

- 記号 Π (テキスト 76 ページ，問題 3.8 (4)) について質問がありました．Σ は総和記号ですが Π は “積 product をとる” という記号です．ちなみに “Σ” はギリシア文字の “σ, ς” の大文字で sigma とよむのはご存知でしょう．和 sum の頭文字 s に相当する文字なので，この文字が総和記号に使われています．一方 “Π” はギリシア文字の “π” の大文字です．積 product の頭文字 p に相当します．
  積の記号 Π は，総和記号と同様に

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n, \qquad \prod_{j=1}^{n} j = n!$$

  などとつかいます．テキスト 76 ページの Vandermonde の行列式に現れる $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ は “$i < j$ を満たすすべての (i, j) に関して $(x_i - x_j)$ を並べ，それらの積をとる” こと．ここで “$i < j$” は正確には “$1 \leqq i < j \leqq n$”．例えば，$n = 4$ の場合は

$$\prod_{i<j}(x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

  です．
- 授業で「あとでやる余因子展開の特別な場合」という話をしたら「余因子展開ってなんですか」という質問が複数きました．あとでやります．特別な場合については今回きちんと説明します．
- 講義資料 7，5 ページ最後の行：40 ページ ⇒ 39 ページ.
- 講義資料 7，6 ページ上から 2 行目：52 ページ ⇒ 53 ページ.

授業に関する御意見

- テストが怖いです．　**山田のコメント：** こわくないよ．ふふふ ♡
- 次の中間試験を難しくしてください．皆が解けないくらいに．
  山田のコメント： 5m のメジャーで蚤の身長を測るように?

- 毎回授業で先生の左肩がわのサスペンダーがずれおちそうで，授業にうまく集中できません．このままだと中間テストが危ういです．
  山田のコメント： はぁ．授業に集中してもしなくても，試験ができればいいんです．
- 中間試験で良い成績を獲得し自信に繋げたい．
  山田のコメント： そうしてください．
- 面白くなってきました． **山田のコメント：** So?
- 赤色チョークは見にくい．使うなら強く書いて． **山田のコメント：** Sorry.
- 先生，教務課の人を責め (攻め) すぎです．
  山田のコメント： 「責め」と「攻め」とどちらが好きですか.「受け」という回答はなしです．
- なぞの板って結局何でつけられていたのですか?
  山田のコメント： ずっと昔，スクリーンが取り付けられていたそうです．
- 先生はいつもニコニコしていますね． ~~まるで這いよる混沌ですね~~
  山田のコメント： 混沌は混沌としているので這いよってきてもよくわからないような気がします．
- 記号が増えまくって混乱しそうです．
  山田のコメント： まだまだです．数千字の漢字を扱える人が軟弱なことを言ってはいけません．
- 17 時までになったのは非常にありがたい．授業も難しくなって大変ですし...
  山田のコメント： しばらく続けてみましょう．今回は受け付けませんが．
- このプリントの提出時刻は 17 時をすぎて "箱をあけて確認するまでの間" だと思います（シュレディンガーの猫的な)
  山田のコメント： 提出された，と提出されない，の重ね合わせ?
- 授業中に腕時計ではなく，掛け時計を使っているのには何かこだわりがあるんですか?
  山田のコメント： (1) 腕時計は暑い．(2) 掛け時計は見やすい．
- カレーパンください． **山田のコメント：** いやです．

質問と回答

■順列

質問： 転倒数という言葉を初めて聞いたのですが，行列式の定義以外で使われることはありますか? 数えるのが大変なのであまり活躍して欲しくないです．

お答え： 転倒数それ自体よりも「順列の符号 ($(-1)^r$; r は転倒数)」はよく使います．行列式と関係が深いですが「右手系，左手系」など空間の向き付けの議論は符号と関係が深いですね．

質問： 転致数（原文ママ：転倒数のことか）の意味は理解したのですが，ある行列式の項が正か負かを判断するにはどこを見ればいいですか．例えば $a_{11}a_{23}a_{32}$ という項があれば，a_{32} の "32" が転致されているので $r=1$ となり負になるという考え方でいいですか．

お答え： よくありません．$a_{1p1}\dots a_{1p_n}$ の係数が $\varepsilon(p_1,\dots,p_n)$．ご質問の例では $n=3$ で $p_1=1$, $p_2=3$, $p_3=2$ なので，順列 $(1,3,2)$ の符号 $\varepsilon(1,3,2)=(-1)^1=-1$ となって符号はマイナス．

質問： 転倒数という発想がすごいと思いました．det を表現する時以外に転倒数による表現が必要な数学の定義や定理って他に存在するのでしょうか？

お答え： 転倒数というよりは，それによって決まる順列の符号が重要．"外積" を一般化したり，"微分形式" を扱うときは必須ですが，この講義の範囲の外です．

質問： 順列 $(p_1,\dots,p_n)$ の転倒数の数え方についてです．教科書 p. 52 には p_1 の右にある p_1 より小さい数の個数を数え，それを p_2, p_3... と続け，総和をとるとありましたが，それ以外の数え方も教えてくださると嬉しいです．

お答え： 転倒数はこう数えるしかないようです．順列の符号については，順列（置換と言うこともあります）を "互換" の合成で表してやってその偶奇を見る，という方法があります（たとえば，斎藤正彦「線型代数入門」，佐竹一郎「線形代数学」などの教科書では，順列の符号をこのようにして定義しています．順列の符号はどちらの定義をしても同じ値になります)．数学的にはこちらの方が正統と思われるのですが，それを述べるための数学的な準備がそこそこ面倒臭いので，今回のテキストでは転倒数を用いて順列の符号を定義しているのです．すなわち，転倒数の求め方は「それほど面倒くさくない」ということです．

■行列式

質問： 行列式を求める時，対角行列を（原文ママ：対角成分のことか）必ず 1 にした方がよいですか? 分数になって計算ミスしそうなのですが...

お答え： ぶっちゃけた話，値が求まればよい．講義でも 1 とせずにやった例があるはず．

質問： 行列式で右下がりに成分をかけたものは “+” で右上がりに成分をかけたものは “−” になるというのは，物理の授業でやったベクトルの外積のルールと一緒なのですが，ベクトルの外積もそのように定義したのですか.

お答え： だいたいそんな感じ．外積と行列式の関係は 2 回くらい後でやる．

■三角行列

質問： 今回，上三角行列について取り上げられました．では，下三角行列はどうなんだろう？ と思い，調べてみると存在（命名？）されていたので質問です．この下三角行列は積極的に使っていくメリットはありますか？ 自分で少し考えてみたところ，下三角行列の転置行列が上三角行列であることが重要なのでは，という結論に至りましたが，いかんせんこれ以上は一日では思いつかなかったので，下三角行列について教えていただけると嬉しいです.

お答え： 掃き出し法によって正方行列を上三角行列にすることができます．ただし，ここでは “階段行列” までは変形しないで，“第 i 行の c 倍を第 j 行に加える” という基本変形は $i < j$ の場合のみに行うこととします．この変形は，与えられた正方行列 A を $A = LU$ (L は下三角, U は上三角) という形に書き表すことに対応しています（基本行列の形をちょっとだけよく考えればわかる)．このような行列の分解を “LU-分解” といい，数値計算など応用上よく用います．連立 1 次方程式は LU-分解ができればほとんど解けたも同然と思ってよいですね.

質問： 上三角行列の行列式が対角成分の積であるのなら，下三角行列の行列式も同じであるといえますよね.

お答え： 上三角行列の行列式が対角成分の積であることの理由（講義で説明した）がわかっていれば自明.

■問題

質問： 3.8 (3) は行基本変形で

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0x^n \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} + a_{n-2}x + \cdots + a_0x^{n-1} \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & a_{n-2} + \cdots + a_0x^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & 0 & a_1 + a_0x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_0 \end{vmatrix}$$

一段上に持ちあげて (1 行目は最後の行へ) $(-1)^n(-1)^n \cdots (a_n + \cdots + a_0x^n) = a_n + \cdots + a_0x^n$ と解いたのですが，$2 \sim n+1$ 行目を 1 行目に足す $x - 1$ で括れて講義で用いた行列式を彷彿させますが，これをもう少しスマートに解くことは可能でしょうか.

お答え： 結論をみると $(x - 1)$ を因数に含んでいないので，これを “くくり出す” のは無理ですね．したがって，なにか “分数式” の形にしなければならないので，あまりスマートではないと思います.

質問： 3.11 が奇数次でないといけないことを示すのには，例えば，交代行列 A では ${}^tA = -1$ なので，行列式をとって $|{}^tA| = |-A|$ で，定理より $|{}^tA| = |A|$ なので，$|A| = |-A| = |-E|\,|A|$ より $|-E| = \begin{cases} 1 & (A \text{ が偶数次}) \\ -1 & (A \text{ が奇数次}) \end{cases}$

と場合分けされることを示せばよいのですか?

お答え： すでに示していますよね．よいです．ただし，この講義では単位行列は I.

■言葉と記号

質問： 行列式の定義が複雑で特殊なものに見えます．行列式って具体的にはどんなときに使うんですか?

お答え： 講義で述べたのは正則性を判別するフラグ．重積分（多重積分）の変数変換の公式に現れる，ということも言った気がする.

質問： 行列式は何のために使いますか? 何を表しますか.

お答え： 前半：例えば正則性を判別するフラグ．他にもさまざまな使い道がある．“足し算は何に使いますか” というのと同じ程度の質問です．後半，低次の行列式については数回あとで説明します.

質問： 線形の「線」は直線の「線」と同じ意味ですか? 直型と言う方がより正確なのでは?

お答え： Linear の訳語（と何回か説明したはず)．「直」は数学では直角，直交，直和という使い方をするので，この場合はあまり実態を表していないように思います.

質問： 物理では ε_{ijk} と表していたのですが，$\varepsilon(p_1, \dots, p_n)$ は $\varepsilon_{p_1p_2\cdots p_n}$ と表せますか?

お答え： 後者のように書く人もいます．同じ文脈で両方を書く人はいません.

質問： $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ の両端の線は何と呼ぶべきですか.

お答え： 特に呼び方は知りません.「縦線」“vertical line” でしょうか.

■その他

質問： 「det の値が場合分けに依らない」ことの理由をもう少し詳しくお願いします.

お答え： 文脈は？たとえば $\det I =$

質問： 零行列でない n 次正方行列 A, B において $|A+B| = |A| + |B|$ が成り立つときの法則はありますか.

お答え： 「法則」という語の用法を誤っています．“$|A+B| = |A| + |B|$ が成り立つための条件は何か” という問いなら意味が通じます．例えば $n = 1$ は十分条件です.

質問： 邪気眼をつかって解答を透視するのはセーフですか.

お答え： 邪気眼ってなーに？おいしいの？

質問： det を変形していけば因数分解の式がでる，ということですが，他の因数分解の式も特殊な変形をしなければ出てこないんでしょうか.

お答え： そういうことは言っていません．因数分解の式の多くはは行列式の変形から得られる，としか言っていませんが.

質問： a_{ij} の添字の部分が小さすぎて見えなかったので 3 次行列の det をもう一度教えて下さい.

お答え： テキスト 54 ページ，例 7.

質問： 行列式の計算をパソコンでやらせるときは定義式からごり押しでやらせるだけで，行基本変形を用いて行列式を簡単にするようなことはしないのですか.

お答え： 原則として前者は使わず，後者を用いる，ということを説明したはず．前回の最後の問題は，そういうことを確かめる問題.

質問： 講議資料 7-5 の例 7.2 の (テキスト 40 ページ例 7) というページ数が間違っています.

お答え： あなたの漢字が間違っています（すでに講義と講義資料で複数回言及している）.

8 行列式 (2)

■順列の符号

- $(1, 2, \ldots, n)$ のうち 2 つの数を入れ替えて得られる順列の転倒数は奇数である．したがって，順列の符号は -1.
- 順列 $(p_1, \ldots, p_n)$ の 2 つの数を入れ替えて得られる順列の転倒数は，もとの順列の転倒数から奇数だけ増える．したがって，順列の符号が変わる．

■行基本変形と行列式 (前回の復習)

- 2 つの行を入れ替えると，行列式の符号が替わる．
- ある行を c 倍すると行列式は c 倍になる．
- ある行のスカラ倍を他の行に加えても，行列式はかわらない．

■次数を落とす公式　テキスト 58 ページ，定理 3.6:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

このことから

- 上三角行列の行列式は対角成分の積

がわかる．

■積の行列式　テキスト 60 ページ，定理 3.8

$$\det(AB) = (\det A)(\det B). \tag{8.1}$$

このことから，

定理 8.1 (テキスト 61 ページ，定理 3.19)**.** 正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ となること．とくに，そのとき $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

■転置の行列式　テキスト 60 ページ，定理 3.11:

$$\det({}^t A) = \det A.$$

このことから，行列式の行に関する性質はすべて列に関する性質に置き換えることができる：

- 2 つの列を入れ替えると，行列式の符号が替わる．
- ある列を c 倍すると行列式は c 倍になる．

2012 年 6 月 7 日 (2012 年 6 月 7 日訂正)

- ある列のスカラ倍を他の列に加えても，行列式はかわらない．

これらの変形を “列基本変形” という．
さらに，下三角行列の転置は上三角行列となるので，

- 下三角行列の行列式は対角成分の積である．

問題

8-1 式 (8.1) の左辺と右辺の積の積の意味の違いを述べなさい．

8-2 n 次正則行列 P と n 次正方行列 A に対して A と $P^{-1}AP$ は一般に等しくない．このことを確かめた上で，

$$\det(P^{-1}AP) = \det A, \qquad \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

であることを示しなさい．

8-3 実数を成分とする正方行列 A が**直交行列** an orthogonal matrix であるとは，${}^tAA = I$ となることである．直交行列の行列式は 1, -1 のいずれかであることを示しなさい．さらに，行列式が 1 (-1) である直交行列は，実数 θ を用いて

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\right)$$

と書けることを示しなさい．これらの行列が定める座標平面の 1 次変換はどんな意味があるか．

8-4 複素数を成分とする行列 $A = [a_{ij}]$ に対して $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$ ($\overline{x}$ は x の共役複素数）と定める．さらに $A^* := {}^t\overline{A}$ を A の**随伴行列** the adjoint matrix という．複素数を成分とする正方行列 A が**ユニタリ行列** a unitary matrix であるとは，$A^*A = I$ が成り立つことである．ユニタリ行列の行列式はどのような値をとりうるか．

8-5 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I$ を求めなさい．