2012 年 7 月 12 日 (2012 年 7 月 19 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 12

お知らせ

- 次回 7 月 19 日が講義最終回になります．授業評価アンケートを実施いたしますので，ご協力をお願いいたします．
- 7 月 19 日は提出物を受け付けません．ご了承ください．
- 中間試験の答案を受け取っていない方は，まだ数学事務室 (本館 3 階 332B) においてありますので，受け取って下さい．答案に定期試験の予告を付けております．
- 7 月 26 日 (木) は，山田が不在のため，演習担当の皆川先生に授業をお願いしております．教室は通常と同じ W521 です．

前回の補足

問題 11-2, 11-3 について考えてくださった方が数名いらっしゃいました．いろいろと難しいことを考えておられますが，定義から直接示すことができます．ちなみに，一般に n と r は等しいとは限りませんから，$n \times r$ 行列 $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]$ の行列式なんて考えてはいけません．使う事実は

$$(*) \qquad s \text{ 次正則行列 } A \text{ と } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s \text{ に対して} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

となることだけ．

- 11-2：スカラ $t_1, \dots, t_r$ に対して

$$t_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + t_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad P[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \qquad (*)$$
$$\Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r]\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad t_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + t_r\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{o}.$$

  ここからあとは自分で書いてみよう．
- 11-3：スカラ $t_1, \dots, t_r$ に対して

$$t_1\boldsymbol{c}_1 + \dots + t_r\boldsymbol{c}_r = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_r]\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]Q\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}$$

  とくに $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立であるときは，Q が正則であることに注意すれば

$$t_1\boldsymbol{c}_1 + \dots + t_r\boldsymbol{c}_r = \boldsymbol{o} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}.$$

したがって $\boldsymbol{c}_1$, ..., $\boldsymbol{c}_r$ は一次独立.

一方，$\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_r$ が一次従属であるときは,

$$[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \quad \text{となる} \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{o} \quad \text{が存在する．そこで} \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} := Q^{-1}\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{bmatrix}$$

とおくと, Q が正則だから ${}^t[t_1, \dots, t_r] \neq \boldsymbol{o}$ かつ $t_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + t_r\boldsymbol{c}_r = \boldsymbol{o}$ が成り立つ．したがって $\boldsymbol{c}_1$, ..., $\boldsymbol{c}_r$ は一次従属.

前回までの訂正

- 一次独立性の説明で挙げた例で，$\boldsymbol{e}_1 = {}^t[1, 0, 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t[0, 1, 0]$, $\boldsymbol{e}_3 = {}^t[0, 0, 1]$, $\boldsymbol{e}_4 = {}^t[1, 0, 1]$ に対して $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$.
- 講義資料 11，問題 11-2/11-3: "$\in \mathbb{R}^n$" の "$\in$" が 3 箇所抜けていました (7 月 5 日修正済み)

授業に関する御意見

- クーラーききすぎではないですか?
- 講義室が暑すぎるので，こちらで勝ってにエアコンを操作してもいいですか?
  山田のコメント： という 2 つのご意見がでてきています．どうしましょう.
- 質問を考えていたら 1 時間以上経っていました. **山田のコメント：** それがこちらの企み.
- 今まで一次独立という言葉を特に深い意味を考えずに使っていました．次から気をつけます.
  山田のコメント： 定義のある言葉ですからそのとおりに使ってください.
- 4 次元以上のベクトルという概念が実際にあったということが驚きだった.
  山田のコメント： そう? 普通に思うけど... 数学では無限次元も日常的に使います.
- 期末試験の範囲はどこからどこまでですか.
  山田のコメント： 試験予告に書いてあると思いますが「主として，前期にこの科目の講義で扱った内容」です.
- 前回の続きですが，格好つけるでなく括弧つけるです．$1 \leqq (i, j) \leqq n$ としないとわかりにくいということです．でももう覚えたのでいいです.
  山田のコメント： それならいいです．ちなみに $1 \leqq (i, j) \leqq n$ という記号は見たことがありません．(i, j) は一つの数学的対象に見えてしまって，それを 1 や n と比較する，というナンセンスなことになってしまうので．曖昧さを回避するなら $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$ と両方書くべきです.
- 先生はチルダを $\tilde{a}$ とお書きですが，僕が (山田注：~ が左右逆) と書いたら殺されますか?
  山田のコメント： この 2 つの "にょろん" を区別して使う場面は見たことがありません．見てないだけかもしれませんが．向きが逆なフォントもあるんですよね〜．(この "にょろん" が Ricty では逆)
- 次回からまた難しくなりそうで，いやだなぁ... **山田のコメント：** せっかく大学生なんだから難しいことやろうよ.
- この調子だと，後期の参加人数はどのくらいになるんだろう...
  山田のコメント： 試験はたくさん (昨年度・一昨年度実績；少し減ることを期待してたのに)
- 最近，金曜日に学校にいけない病にかかり，この紙がなかなか提出できません.
  山田のコメント： はやく治してください.
- (｀・ω・´) **山田のコメント：** :-P
- 暑いですね．最近. **山田のコメント：** そうですか?
- 2D いいよね 2D. **山田のコメント：** 1D ではだめですか?
- 平日では普段どちらでお食事されていますか?
  山田のコメント： 第二食堂，商店街のどこか，研究室でひきこもりながら，のいずれか.
- 先生の休日の過ごし方を教えてください. **山田のコメント：** 休日があまりありません.
- 先生は Twitter やってるんですか? **山田のコメント：** いいえ.
- 肖像権って大事ですよね. **山田のコメント：** 大事です.

質問と回答

質問： 一次独立であることは平行であることと同義ではないとのことですが，$\mathbb{R}^n$ 上での $\boldsymbol{o}$ でない２つのベクトルが一次従属であることと，２つのベクトルが平行であることは同義であるとみなせますか?

お答え： たぶん “同値である” といったほうが正確.「２個のベクトルが１次従属であるための必要十分条件はそれらが平行であること」は正しいです．ただし “平行である” ということを定義しないといけませんね.

質問： 高校では「$\vec{a}$, $\vec{b}$ が $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ を満たすとき $\vec{a}$, $\vec{b}$ は１次独立」と習ったのですが，講義では「どの２つのベクトルも平行でない $\neq$ １次独立」といっていたので，高校のベクトルの１次独立と１次結合における１次独立とは違うのだろうかと思ったのですが，実際違うものなのでしょうか?

お答え： ２個のベクトルの関係に限れば同じもの.「３個のベクトルで，どの２つを選んでも互いに平行でないが，１次従属であるもの」の例は講義であげましたね.

質問： 授業では “どの２つのベクトルも互いに平行でない $\neq$ １次独立” とおっしゃっていたので，１次独立と “イコール” の関係となるものを考えてみました．ベクトルが 3 つ以上の t おきは，“(どの２つのベクトルも互いに平行ではない，どの３つのベクトルも同一平面上にない) $=$ １次独立” は成立するのではないでしょうか? 背理法によって証明できた気になっているのですが.

お答え： 3 個のベクトルの独立性はこれで ok ですが，4 個以上の場合は正しくありません．たとえば

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

とおくとこれらのうちどの２つを選んでも平行でないし，どの３つを選んでも同一平面上にのっていませんが，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{o}$ なので１次独立ではありません.

質問： どの２つのベクトルも互いに平行でないことは１次独立であることの必要条件であるということでいいのですか.

お答え： いいのです．もし $\vec{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ のうち $\boldsymbol{a}_1$ と $\vec{a}_2$ が平行で, $\boldsymbol{a}_1 = k\boldsymbol{a}_2$ とかけているなら，$\boldsymbol{a}_1 - k\boldsymbol{a})_2 + 0\boldsymbol{a}_3 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ となり，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が１次従属．この，対偶をとれば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立ならば $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は平行ではい．$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の選び方を変えても同じことができるから，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立ならばそれらのうちどの２つのベクトルも平行ではい.

質問： ばねの方程式で，これも１次結合だとおっしゃってましたけど，１次結合はベクトルでなくても成り立ち，１次独立，１次従属はベクトルにおいて成り立つということですか？

お答え： いいえ．ベクトルという概念を拡大解釈します．後期に「抽象ベクトル空間」として紹介しますが，その際の言葉に従えば，“線形微分方程式 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ の解全体がなすベクトル空間は，１次独立な２つの解 $x_1(t) = \cos\omega t$, $x_2(t) = \sin\omega t$ の１次結合全体の集合と一致する”.

質問： 以前，この質問用紙において “n 次” を “n 元” と訂正されたのですが，“次” と “元” の違いが分かりません．“次”, “元” って何ですか?

お答え： たぶん “n 元連立１次方程式” を “n 次” と書いたのでは？多項式の “次数” っていうのは中学校でならいましたよね．それが “次”, 未知数の個数が “元”．たとえば $x^2 - 2x + 3 = 0$ は 1 元 2 次方程式,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 1 \\ x(x-y) &= 2 \end{cases} \quad \text{は} \quad 2\text{ 元 }2\text{ 次}, \qquad \begin{cases} 2x - y &= 3, \\ x + y &= -1 \end{cases} \quad \text{は} \quad 2\text{ 元 }1\text{ 次}.$$

質問： １次独立 (or 結合 or 従属) の他に 2 次独立 (or 結合 or 従属) さらに 3 次のもあるのでしょうか.

質問： 2 次結合ってあるんですか?

質問： 一次独立の一次とはどういう意味なのでしょうか．二次独立や二次従属があるのでしょうか．ないなら「独立」でいいと思います.

お答え： 講義で説明したように “linear” の訳語です.「線形」と訳す場合もあります．原語に “1” という数字が入っていないので，数字を増やすのは意味がなさそうですね．日本語で「一次」というのは「一次式で表される」という意味です.

質問： 非自明な解と自明な解の意味は何ですか? 具体的な例を書いていただけるならありがたいです.

お答え： きちんと定義がある語です．行列を用いて表した同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を解としてもつ（あたりまえ）．これを自明な解 the trivial solution といいます．それ以外の解，すなわち $\boldsymbol{o}$ でない解を非自明な解 non-trivial solutions といいます．テキスト 35 ページ．

質問： 今では $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ という具合にベクトルを表していますが，なぜ高校のときの教科書では $\vec{a} = (1, 2, 3)$ という具合にベクトルを表すのでしょうか．

お答え： 気になりますよね．縦に書く理由は明白で，行列を左からかけたいからなのですが，横に書く理由は（スペースをとらない，という以外に）思いうかびません．縦と横を区別しない，という立場もあるにはありますが．

質問： 余因子行列は $\widetilde{A} =$ (略) のように表されますが，$\tilde{a}_{ij}$ の定義で $(-1)^{i+j}$ 倍したり，i 行 j 列を取り除いて行列式とったりしている理由がさっぱりわかっていません．僕達は「フーンなるほど」と余因子の定義とその性質を覚えてさえおけば良いのでしょうか? それとも性質を証明できねばならないのでしょうか．

お答え： 証明は「フーンなるほど」という段階でもできると思います．いずれにせよ，余因子の定義は定義として（しばらくの間は）覚えておいてほしい．将来，必要な場面が会ったら，そのときに「こんなんがあったな」と思い出して定義を調べれば良い．なお，この定義は $\widetilde{A}A = \det A I$ が成り立つように作ったものです．

質問： テキスト 4.2 のように一見して非自明な解がみつからない場合は地道に掃き出し法で連立方程式を解く方法しかないのでしょうか?

お答え： そうです．

質問： 資料の問題 11-2 で「P は n 次正則行列」だと左辺と右辺の列数が合致しないので，「P は r 次正則行列」の間違いではないですか?

お答え： いいえ．$[\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r]$ は $n \times r$ 型の行列 ($\boldsymbol{b}_k \in \mathbb{R}^n$ に注意) なので，左からかけられる正方行列は $n \times n$ 型だけで，そのときの積は $n \times r$ 型になります．

質問： ノートに $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ 1 次独立ならば $\det[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r] \neq 0$ と書かれていたので，11-1 の答えは $\det[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n] = 0$ だと思うのですが，あったっていますか？

お答え： あたっていません．ノートにあった r は n だと思います．「ベクトルの次数とベクトルの個数が一致する場合」と説明したはず．問題 11-1 では $n = r$ と言っていませんので，$\det[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]$ は一般に意味を持ちません．

12 部分空間

■集合の用語の復習 数学的対象の集まりを**集合** a set という．集合を構成している一つ一つのメンバーをその集合の**要素** an element, a member という．対象 x が集合 X の要素であるときに $x \in X$ と書く．集合 X に対して $x \in X$ または $x \notin X$ のいずれか一方が成り立つ．とくに要素をひとつも持たない集合を**空集合** the empty set といい，$\emptyset$ と書く[*1]．任意の x に対して $x \notin \emptyset$ である．

集合 Y のすべての要素が集合 X の要素となっているとき，Y は X の**部分集合** a subset であるといって，$Y \subset X$ と書く[*2]：

$$Y \subset X \qquad \Leftrightarrow \qquad (y \in Y \quad \text{ならば} \quad y \in X).$$

空集合は任意の集合の部分集合とする：$\emptyset \subset X$．

2 つの集合 X, Y に対して，

$$X = Y \qquad \Leftrightarrow \qquad (X \subset Y \quad \text{and} \quad Y \subset X)$$

である．

集合 X の部分集合 W_1, W_2 に対して，X の部分集合

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in X \,|\, x \in W_1 \text{ and } x \in W_2\}, \qquad W_1 \cup W_2 = \{x \in X \,|\, x \in W_1 \text{ or } x \in W_2\}$$

をそれぞれ W_1, W_2 の**共通部分** the intersection, **合併集合** the union という．

■部分空間 以下，正の整数 n に対して

$$\mathbb{R}^n = \{{}^t[x_1, \dots, x_n] \,|\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

すなわち，n 次元数ベクトル空間をとり，その部分集合を考える．

定義 12.1 (テキスト 84 ページ)**.** $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が $\mathbb{R}^n$ の**部分空間** a subspace または**線形部分空間** a linear subspace であるとは，

- $\boldsymbol{o} \in W$,
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ ならば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$,
- $\boldsymbol{a} \in W, k \in \mathbb{R}$ ならば $k\boldsymbol{a} \in W$

が成り立つことである．

例 12.2. $\mathbb{R}^2$ の部分空間を全て求めよう．テキスト 85 ページの例 12 でみるように $\{\boldsymbol{o}\}$，$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である (自明な部分空間)．$W \subset \mathbb{R}^2$ を $\{\boldsymbol{o}\}, \mathbb{R}^2$ ではない部分空間とする．$W \neq \{\boldsymbol{o}\}$ なのだから，$\boldsymbol{a} \in W$ で $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ となるものが存在する．すると，部分空間の定義から，

$$\{t\boldsymbol{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset W$$

2012 年 7 月 12 日 (2012 年 7 月 19 日訂正)

[*1] ϕ と書くこともある．

[*2] 高等学校の教科書などでは，このことを $Y \subseteq X$ と書くことが多いようだが，このように $Y \subset X$ と書く方が多数派のように見える．この記号に従えば $X \subset X$ である．

となることがわかる．いま $\boldsymbol{b} \in W$ で $U := \{t\boldsymbol{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ の要素でないものが存在したとする．すると，部分空間の定義から

$$\{t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \,|\, s, t \in \mathbb{R}\} \subset W$$

であることがわかる．ここで，$(t,s) \neq (0,0)$ となる s, t に対して $t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{b} \in U$ となってしまい $\boldsymbol{b} \notin U$ に反するので $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立でなければならない．すると，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で表される．（実際，行列 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ は正則なので連立方程式 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ をとけばよい．）したがって

$$\text{任意の } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ に対して } \boldsymbol{x} \in \{t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \,|\, s, t \in \mathbb{R}\} \subset W; \qquad \text{したがって } \mathbb{R}^2 \subset W.$$

ここで $W \subset \mathbb{R}^2$ であったから $W = \mathbb{R}^2$ となり，$W \neq \mathbb{R}^2$ と仮定したことに矛盾する．すなわち $\{t\boldsymbol{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ の要素でない W の要素は存在しない．すなわち $W = \{t\boldsymbol{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ が成り立つ．

以上から $\mathbb{R}^2$ の部分空間で非自明なものは，零ベクトルでない $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ を用いて

$$W = \{t\boldsymbol{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

と書ける．逆にこの形のものが部分空間であることはすぐにわかる（確かめよ）．

■部分空間の表示 (1)　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle := \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r\} \subset \mathbb{R}^n \tag{12.1}$$

とおくと，この集合は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる (テキスト 86 ページ)．式 (12.1) の左辺を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が**生成する** (**張る**) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 the subset of $\mathbb{R}^n$ generated (spanned) by $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ という．

例 12.3. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = {}^t[1,0,1]$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t[0,1,1]$ に対して $W := \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ とおく．

- W の要素を挙げてみよう．$\boldsymbol{a}_1 = 1\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2$ は W の要素である．$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = {}^t[1,1,2]$, $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 {}^t[1,-1,0]$ も W の要素である．
- $\boldsymbol{b} = {}^t[2,3,1]$ は W の要素であるかどうかを確かめよう．$\boldsymbol{b} \in W$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ をみたすスカラ c_1, c_2 が存在することである．すなわち連立一次方程式
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
が解を持てばよい．実際，この方程式は解をもたないので $\boldsymbol{b} \notin W$.

■部分空間の表示 (2)　$r \times n$ 型行列 A に対して

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\} \subset \mathbb{R}^n$$

を，同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の**解空間**という．これが $\mathbb{R}^n$ の部分空間になることは容易に示すことができる（テキスト 88 ページ）．

例 12.4. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

に対して，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解空間 $W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\}$ を考える．

- $\boldsymbol{a}={}^t[1,1,0,3]\in W$ である．実際，$A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ が成り立っている．
- W の要素をいくつか挙げてみよう．連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解は

$$\left\{ c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$$

であるから，この集合は W と一致する．すなわち $W=\langle {}^t[-1,1,1,0], {}^t[-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0,1]\rangle$ となるので，前の例と同様に要素をたくさん挙げることができる．

問題

12-1 次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合の要素を（あれば）3 つあげなさい．また，$\mathbb{R}^3$ の要素で，それらの集合の要素でないものを 3 つあげなさい．さらに，それらが $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているか調べなさい．

(1) $\emptyset$

(2) $\left\{{}^t[x_1, x_2, x_3]\,;\, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = a\right\}$ （a は定数）

(3) $\{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ $\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(4) $\left\{{}^t[x_1, x_2, x_3] \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = a\right\}$. ただし a は実数の定数.

12-2 テキスト 84–85 ページの例 8 から 12 を確かめなさい.

12-3 テキスト 111 ページ, 4.3, 4.4, 112 ページ 4.13.

12-4 $\mathbb{R}^n$ の部分空間の要素の個数は 1 個でなければ無限個である.

12-5 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W_1, W_2 の共通部分は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である.

12-6 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W_1, W_2 に対して

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \mid \boldsymbol{a}_1 \in W_1, \boldsymbol{a}_2 \in W_2\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間で，さらに $W_1 \cap W_2 \subset W_1 + W_2$ が成り立つ．等号が成り立つのはどういうときか.

12-7 $\boldsymbol{a}_1 = {}^t[1, 1, 0, 1]$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t[1, 1, 1, -1]$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t[1, 0, 1, 1]$ に対して，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ を同次連立一次方程式の解空間の形で表しなさい.