2012 年 7 月 5 日 (2012 年 7 月 5 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 11

前回の補足

- 問題 10-1 (2) ($\operatorname{rank} A = r$ のとき $\operatorname{rank} \widetilde{A}$) の正解です：

$$n \text{ 次正方行列 } A \text{ の階数が } r \text{ のとき} \qquad \operatorname{rank} \widetilde{A} = \begin{cases} n & (r = n \text{ のとき}) \\ 1 & (r = n-1 \text{ のとき}) \\ 0 & (r \leqq n-2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

です．詳細はこれからの授業で少しずつ．

前回までの訂正

- 問題 10-2 について黒板に書いた式：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} t & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\left| \quad \right|} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} t & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\left| \quad \right|}$$

- Cramer の公式の説明で

$$\det[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{b} \dots \boldsymbol{a}_n] = b_1 \tilde{a}_{j1} + \dots + b_n \tilde{a}_{jn} \quad \Rightarrow \quad \det[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{b} \dots \boldsymbol{a}_n] = b_1 \tilde{a}_{1j} + \dots + b_n \tilde{a}_{nj}$$

- 講義資料 10, 5 ページ，定理 10.3：$\det A = 0 \Rightarrow \det A \neq 0$

授業に関する御意見

- 質問と意見の掲載している量が 4，5 月に比べてかなり減っていますね．. . . (つまりそういうことですか?)
  山田のコメント： つまりそういうことです．
- プリントをどう保存するかで悩みます．　**山田のコメント：** Web 上にあるので気にしなくてもよい?
- やさしく. . . してね. . . (期末)　**山田のコメント：** だれにとって?
- 暗いので前の方の電気をつけてください．　**山田のコメント：** 必要なら勝手につけてくださって結構です．
- 授業が難しくなってきました．　**山田のコメント：** まだまだ
- また試験になると $1 \leqq i, j \leqq n$ が $1 \leqq i$ と $j \leqq n$ 別々に見えてテンパリそうです．かっこつけてもらえませんか．
  山田のコメント： 格好つける?
- いつも僕の質問を答えてくださってありがとうございます．　**山田のコメント：** どういたしまして．
- 行列を微分するという発想が謎だった．　**山田のコメント：** なんで謎なの?
- 以前，別の授業で線形代数の知識を扱ったことがあり，線形代数学の便利さを感じました．
  山田のコメント： ですよね．「科目」なんて便宜的なものだから．
- 世の中ってうまくできてますね?　**山田のコメント：** え? 君たちがうまく**作る**んではないの?
- ひょっとして twitter 実名でやってます?　**山田のコメント：** いいえ，あの人は別人．
- 夏休みに先生のお宅におじゃましてもいいですか．　**山田のコメント：** 嫌です．

質問と回答

質問： $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} a'_{ij}\ \mathrm{tr}\left(\widetilde{A}\frac{dA(t)}{dt}\right)$ となる計算過程を教えていただけませんか.

お答え： $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ としたとき $\mathrm{tr}(BC) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ji}c_{ij}$. たぶんこの計算は 4 月にやってみた.

質問： $i \neq j$ で $a_{i1}\tilde{a}_{j1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{jn} = 0$ の説明で，例として

$$0 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{13} \\ a_{32} & a_{32} & a_{13} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{k2}\tilde{a}_{k1}$$

とありましたが，これは行列が特異な場合であるからだと思うのですが，どういった意味の説明だったのですか.

お答え： 行列式をとっている行列は特異です．実際，第 1 列と第 2 列が一致しますので，（A に関する条件なしで）行列式は 0 になります.

質問： クラメールの公式のところで $x = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}\boldsymbol{b}$ だから $x_i = \frac{\det|\boldsymbol{a_1}\ldots\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{a}_n|}{\det A}$ (原文ママ．右辺の縦線は [ ] だと思う．それから最初の x は太字?) というのが理解できなかったのでもう一度教えて下さい.

お答え： 証明はテキスト 71 ページ．これを読んでどこが分からないかを説明してください.

質問： philosophical に解けるってどういう意味ですか.

お答え： 公式に代入して計算すれば解ける，ということになるが，実際には計算の手数が大変にかかるので，これを用いてとくのは現実的ではない，すなわち practical には解けない，ということ.

質問： 今までみた教科書ではどれもクラメールと書かれていたのですが，クレーマーと Cramer どちらで言ったほうがワイルドですか.

お答え： ワイルドの定義がわからないのでなんとも言えません．多くの教科書では「クラメル」と表記しているようです．Gabriel Cramer (1704–1752) はスイスの人なのですが，本当はどう読むんでしょうね．英語読みならクレイマーのような気がしますが.

質問： “余因子” とは “余” と “因子” という字で書かれていますが，“因子が余る” とはどういうことなのでしょうか．なぜこの字が使われていると思われますか.

お答え： 数学では “余” は接頭語 “co” の訳語です．たとえば cosine は余弦，cotangent は余接ですね．“因子” とは掛け算で表されている項の一つの部分です．行列式の定義式で a_{ij} (行列 A の ij 成分) を含む項を a_{ij} でくくった残りの部分という意味です.

質問： 行列式の微分があるから，行列式の積分もありますか? あるなら，微分ですら計算が大変なのに，積分はさらに難解になりそうです.

お答え： 微積分で「重積分の変数変換」はやっていませんか? あれは行列式を積分していると思いますが.

質問： $\widetilde{A} = {}^t\!\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix}$ の証明はありますか?

お答え： ありません．これは余因子行列 $\widetilde{A}$ の定義 definition だからです.

質問： 正しい質問点の合計はどうやって確認できますか.

お答え： 定期試験の報告には付けます．その前に知りたい方はメイルにてお問い合わせ下さい.

質問： 暑くて夜あまり眠ることができませんがクーラーをつけることには抵抗があります．エコな方法で涼しくなれないでしょうか?

お答え： 昔 “ガラス窓に足の裏をつけてねる” ということをやったことがあります（窓といってもベランダにつながるアルミサッシね)．冷たくて気持ちよいです．ただし，かなり高い割合で金縛りにあいます.

質問： 微分した瞬間に脳がシャットダウンしました (汗)　**お答え：**なんで?

11 一次独立・従属

■数ベクトル空間 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書くとき，正の整数 n にたいして

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

を $\mathbb{R}$ 上の n **次元数ベクトル空間**という（テキスト 80 ページ）*1*2.

■一次結合（線形結合） ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とスカラ $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ に対して

$$(*) \qquad c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_r\boldsymbol{a}_r$$

を $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ の**一次結合** a linear combination という (テキスト 80 ページ)*3．行列の積を用いて $(*)$ を

$$[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$$

と表すことができる.

例 11.1. $\mathbb{R}^2$ の任意の要素は $\boldsymbol{e}_1 = {}^t[1, 0]$ と $\boldsymbol{e}_2 = {}^t[0, 1]$ の一次結合で表すことができる：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2.$$

■一次独立・一次従属

定義 11.2 (テキスト 62 ページ)**.** ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が**一次独立** (線形独立; linearly independent) であるとは,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$$

を満たす $c_1, \dots, c_r$ が $(c_1, \dots, c_r) = (0, \dots, 0)$ に限ることである．一次独立でないベクトルの組は**一次従属** linearly dependent である，という.

例 11.3. $\mathbb{R}^2$ のベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1 = {}^t[1, 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t[0, 1]$ は一次独立である．実際,

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{o} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (c_1, c_2) = (0, 0).$$

また，任意の $\boldsymbol{v} = {}^t[x, y]$ に対して，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}$ は一次従属.

2012 年 7 月 5 日 (2012 年 7 月 5 日訂正)

*1 $\mathbb{R}^n$ の要素，すなわち n 次列ベクトルを単に**ベクトル**と呼ぶことがある.

*2 これから 3 回の講義で扱う内容は $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ にとりかえてもそのまま成立する．$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の違いがはっきりとあらわれるのは，後期に内積を扱うあたりから.

*3 “線形結合” ということもある．“一次” も “線形” も “linear” の訳語なので，多くの場合置き換え可能.

■一次独立性の判定

命題 11.4 (テキスト 82 ページ)**.** ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次独立（従属）であるための必要十分条件は,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \qquad A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]$$

が自明な解しかもたない（非自明な解をもつ）ことである.

命題 11.5 (テキスト 83 ページ)**.** n 個の $\mathbb{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は同次連立一次方程式

$$\det A \neq 0 \qquad A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]$$

となることである.

問題

11-1 $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次従属であるための必要十分条件を “一次独立” という言葉を用いずに表しなさい. (問題が多少曖昧：一次独立でない，が定義だが，これでは一次従属性を具体的に判定するのに不便).

11-2 ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次独立（従属）ならば,

$$[\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r] = P[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r] \qquad (P \text{ は } n \text{ 次正則行列})$$

で与えられるベクトル $\boldsymbol{b}_1$, ..., $\boldsymbol{b}_r \in \mathbb{R}^n$ も一次独立 (従属) である.

11-3 ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が一次独立（従属）ならば,

$$[\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_r] = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]Q \qquad (Q \text{ は } r \text{ 次正則行列})$$

で与えられるベクトル $\boldsymbol{c}_1$, ..., $\boldsymbol{c}_r \in \mathbb{R}^n$ も一次独立 (従属) である.

11-4 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]$ の階数は，$\boldsymbol{a}_1$,..., $\boldsymbol{a}_k$ から選べる一次独立なベクトルの組の最大個数である.

11-5 テキスト 110 ページ 4.1, 4.2; テキスト 112 ページ 4.11, 4.12; テキスト 113 ページ 4.21, 4.22.