

線形代数学第一講義資料 10

お知らせ

- 中間試験の答えは 6 月 29 日までに数学事務室 (本館 3 階 332B) にて受け取って下さい。なお、返却した答案に添付されている用紙が、定期試験の予告・持ち込み用紙を兼ねていますので、かならず答案を受け取ってください。
- Web ページの授業予定表を更新しました。

前回の補足

- 問題 9-1 (行列式の値が $e^{i\theta}$ であるような 2 次のユニタリ行列を求める) について何名かの方からの質問がありました。以前、2 次の直交行列を求める問題を出したと思いますが、それと同じ感じです。使う道具は
 - 絶対値 r の複素数は re^{it} (t は実数) の形に書ける。
 - θ が実数のとき $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ 。
 - $xu + yv = 0$ かつ $(x, y) \neq (0, 0)$ なら $(u, v) = k(-y, x)$ となるスカラー k が存在する。
 - 2 つの負でない実数 s, t が $s^2 + t^2 = 1$ をみたすならば、 $s = \cos \alpha, t = \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) を満たす実数 α が存在する。

やってみましょう: 2 次行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は

$$(*) \quad a\bar{a} + c\bar{c} = 1, \quad a\bar{b} + c\bar{d} = 0, \quad b\bar{b} + d\bar{d} = 1$$

となることである (確かめよ: 条件 $A^*A = I$ を書きすと、もう 1 本 $a\bar{b} + c\bar{d} = 0$ が条件として出てくるが、(*) の第 2 式の両辺の共役をとれば、この式が得られることから、(*) の 3 本が必要十分条件になる)。

条件 (*) の第一式は $|a|^2 + |c|^2 = 1$ と書けるので、 $|a| = \cos \alpha, |b| = \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) を満たす実数が存在する。したがって

$$a = (\cos \alpha)e^{i\xi}, \quad c = (\sin \alpha)e^{i\eta} \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \xi, \eta \in \mathbb{R}\right)$$

と書ける。ここで (*) の第二式から $b = -k(\sin \alpha)e^{-i\eta}, d = k(\cos \alpha)e^{-i\xi}$ となるようなスカラー k が存在することが分かる。これらを (*) の第三式に代入すると、 $|k| = 1$ となる (確かめよ) ので $k = e^{i\zeta}$ (ζ は実数) と書ける。したがって、ユニタリ行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} (\cos \alpha)e^{i\xi} & (\sin \alpha)e^{i\eta} \\ -(\sin \alpha)e^{i\zeta}e^{-i\eta} & (\cos \alpha)e^{i\zeta}e^{-i\xi} \end{bmatrix} \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}\right)$$

と書ける。逆にこの形の行列はユニタリになることがわかる (確かめよ)。とくにこのとき $\det A = e^{i\zeta}$ なので $\det A = e^{i\theta}$ であるための必要十分条件は $\zeta = \theta + 2m\pi$ (m は整数) となることである。したがって問題の条件を満たす行列は

$$A = \begin{bmatrix} (\cos \alpha)e^{i\xi} & (\sin \alpha)e^{i\eta} \\ -(\sin \alpha)e^{i\theta}e^{-i\eta} & (\cos \alpha)e^{i\theta}e^{-i\xi} \end{bmatrix} \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \xi, \eta \in \mathbb{R}\right)$$

となる。

- 問題 9-3: まず, 行列式の定義式から

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $' = \frac{d}{dt}$. (確かめよ: 行列式の定義式の各項に積の微分公式を適用する). この右辺の第 1 項を第 1 行について, 第 2 項を第 2 行について... と余因子展開する. たとえば第 1 項の $(1, 1)$ -余因子はもとの行列 A の $(1, 1)$ -余因子 $\tilde{a}_{11}$ と一致するから, まとめると

$$\frac{d}{dt} \det A = \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} a'_{ij} = \operatorname{tr} \left(\tilde{A} \frac{dA(t)}{dt} \right).$$

- 問題 9-5 のヒント: $\langle a, x \rangle$ は a と $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$ の内積.
- 問題 9-2, 9-3 で「を証明せよ」が抜けている, というご指摘をいただきました. ちょっと古い本の演習問題でこう書いてあるやつがよくあったんですが, 最近はありませんそうですね. 試験問題では曖昧でない書き方にします.

前回までの訂正

- 講義資料 9, 問題 9-5: $a = {}^t[a_1, b_2, b_3] \Rightarrow a = {}^t[a_1, a_2, a_3]$
- 黒板に書いた「2 次正方行列のケイリー・ハミルトンの定理」:
 $A^2 - (\operatorname{tr} A)A - (\det A)I = O \Rightarrow A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = O$

授業に関する御意見

- 期末も頑張りたい。 山田のコメント： はい。
- 中間テストの採点お疲れさまです。 山田のコメント： おつかれました。
- テストの結果が微妙でつらい。今回は 9-1, 3, 5 が難しい。とけない。つらい。
山田のコメント： そう？
- 中間試験でバカなミスをしてしまったので、期末では検算や見直しをしっかりとりたいです。
山田のコメント： してね。
- 中間試験の平均点はどの程度だったのでしょうか。 山田のコメント： 70 点くらい。
- 行列式の定義の意味がサッパリわかりません。 ϵ がでてきたり和 (Σ) の表記の仕方がナゾです。
山田のコメント： なので、できるだけ「くだけた言い方」で説明したのが 5 月 31 日の講義。
- 余因子行列を求めるのは面倒ですね。
山田のコメント： はい。ですから、使い道はむしろ理論的な場面。
- 冷房の設定温度はどれくらいなのでしょう？ 今回の教室は少し肌寒かったです。人が少なかったのも原因かと思いますが...
山田のコメント： そうですね。調べてみます。
- $\tilde{A}$ を「えーによるん」「えーによるんぱ」と 2 通りの言い方をしていましたが「えーによるん」では駄目でしょうか。
山田のコメント： 「～」の発音が難しいのでは？
- $\begin{bmatrix} \square & A & \square \end{bmatrix}$ の $\square$ の部分で赤いチョークを使わないで下さい。非常に見づらいです。あと期末簡単にして下さい。
山田のコメント： 前半：了解。後半：「どうせ君たちは馬鹿だから簡単な問題しかとけないだろう」なんて失礼なことは考えていません。
- 9-1 2 次正方行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ は $\tilde{A} = (\text{tr } A)I - A$ で与えられる。山田のコメント： そうですか (証明しろとか書いてない)
山田のコメント： ですが、そういう書き方の問題って、よくありませんか? (ないですか...)
- 邪神ハンターのアルバイトをしようと思っているのですが、学業と両立できますか? また時給は良いですか?
山田のコメント： 残念ながら知りません。

質問と回答

質問: $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (\det A)(\det D - CA^{-1}B)$ は A が正則のときに成り立つ、とのことですが、 A が正則でないときは $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ はどのような式で表せるのですか。また $B = O$ または $C = O$ のときは A が正則であるなしに関わらず $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (\det A)(\det D)$ と表せますよね。

お答え: 後半: そうです。前半: A, B, C, D のうち少なくともひとつが正則な場合は行基本変形と列基本変形を用いてご質問のケースに帰着できます。 A, B, C, D のすべてが正則でない場合は、簡単には表せないようです。(例えば $Ax = Cx = o$ を満たす零ベクトルでない x が存在するならば、質問の行列の行列式は 0)

質問: 教科書 p 66. 例 18 で

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

となることがよくわかりません。

お答え: 2 列目に 3 列目を加える。

質問: $\det \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & -I \end{pmatrix} = \det(-I)^n$ (原文ママ: 右辺に $\det$ は不要)。(中略)もう少し簡単にこれを導くことはできますか?

お答え: ご質問では、行基本変形、列基本変形を用いて上三角行列にして行列式を求めておられますが、この行列は下三角行列ですので、行列式は対角成分の積です。あるいは転置をして上三角行列にしてもよいですね。

質問: 1 次正方行列 $A = [a_{11}]$ において $\tilde{a}_{11}$ の表す値はどのようなになるのでしょうか。

お答え: これがうまくいかないのが、講義資料 9, 2 ページにあるように $n \geq 2$ としている。

質問: 板書の最後の $a^\perp$ って何ですか。

お答え: $a \perp a \times b$ 。“ a と b は直交する”という意味です。上付きの件は講義資料 3, 6 ページにて既出。

質問: 誤字をなくす為に全てひらがなで書くのはありますか?

お答え: たぶん、次回は「誤字および本来漢字で書くべき語のひらがな表記は減点」と書くか、自由記述の配点を 0 点とするかいずれかにする予定。大和言葉「ために(為に)」などはかな書きでもよいのですが、漢語は漢字で書くべき。

質問: 次の期末試験は中間試験と似た形式、同じくらいの難易度であると考えてよいでしょうか。手のうちを明かしたからには、手の平を返さないで下さいね。

お答え: 中間試験の範囲についてはそのつもり。ただし、みなさんが躓いたところに重点をおきます。

質問: 質問ポイントの決め方を教えて下さい。

お答え: 頭を使っている、と読めるようなものには高い評価を与える。

10 余因子と行列式の展開 (つづき)

■余因子と余因子行列 (復習) n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ ($n \geq 2$) に対して

A の (i, j) -余因子: $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det[A \text{ の } i \text{ 行と } j \text{ 列をのぞいてできる } (n-1) \text{ 次正方行列}]$

$$A \text{ の余因子行列: } \tilde{A} := {}^t[\tilde{a}_{ij}] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

定理 10.1 (定理 3.18/3.19). 上の記号のもと, 各 l ($1 \leq l, m \leq n$) に対して

$$\begin{aligned} a_{1l}\tilde{a}_{m1} + \cdots + a_{ln}\tilde{a}_{mn} &= \sum_{k=1}^n a_{lk}\tilde{a}_{mk} = \delta_{lm}(\det A), \\ a_{1l}\tilde{a}_{1m} + \cdots + a_{nl}\tilde{a}_{nm} &= \sum_{k=1}^n a_{kl}\tilde{a}_{km} = \delta_{lm}(\det A) \end{aligned}$$

系 10.2 (テキスト 69 ページ). 正方行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ は

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I$$

を満たす.

定理 10.3. n 次正方行列 A ($n \geq 2$) が正則である必要十分条件は $\det A \neq 0$ となることである. このとき,

$$(\star) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

と表される.

証明. A が正則ならば $AB = I$ となる行列 $B (= A^{-1})$ が存在するので, 両辺の行列式をとれば $(\det A)(\det B) = 1$. したがって $\det A \neq 0$.

逆に $\det A \neq 0$ のとき $(\star)$ の右辺を B と書けば,

$$AB = \frac{1}{\det A} A\tilde{A} = \frac{1}{\det A} (\det A)I = I, \quad BA = \frac{1}{\det A} \tilde{A}A = I.$$

したがって $AB = BA = I$ となるので, とくに A は正則で B が A の逆行列である. □

定理 10.4 (Cramer の公式; テキスト 70 ページ, 定理 3.21). n 次正方行列 $A = [a_1, \dots, a_n]$ ($n \geq 2$) が正則であるとき, 連立 1 次方程式

$$Ax = b \quad (b \in \mathbb{R}^n)$$

の唯一の解は $x = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ である. ただし

$$x_1 = \frac{\det[b, a_2, \dots, a_n]}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det[a_1, b, \dots, a_n]}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det[a_1, a_2, \dots, b]}{\det A}.$$

注意 10.5. 一般に, 定理 10.3, 10.4 を逆行列を求めたり連立 1 次方程式を具体的に解いたりするために使うことはほとんどない. 理由は講義資料 7 の問題 7-3 を参照せよ. これらはむしろ理論上重要である.

■ 2 次・3 次の行列式の図形的な意味

- $a, b \in \mathbb{R}^2$ に対して $\det[a, b] = \varepsilon S$ である。ただし S は a, b を 2 辺にもつ平行四辺形の面積,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & (b \text{ は } a \text{ に対して左側をさす}) \\ -1 & (b \text{ は } a \text{ に対して右側をさす}) \end{cases}$$

- $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\det[a, b, c] = (a \times b) \cdot c\varepsilon V$$

である。ただし V は a, b, c を 3 辺にもつ平行六面体の面積,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & (a, b, c \text{ は右手系}) \\ -1 & (a, b, c \text{ は左手系}) \end{cases}$$

(テキスト 71 ページ以降)

問題

10-1 (1) テキスト 77 ページ, 3.16.

(2) n 次正方行列 A ($n \geq 2$) の階数が r であるとき, その余因子行列 $\tilde{A}$ の階数を求めなさい.

10-2 関係式

$$\begin{cases} x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) - 2x_4(t) = t \\ x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) + 3x_4(t) = 1 \\ 3x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + 2x_4(t) = -1 \\ 2x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) = 0 \end{cases}$$

を満たす t の関数 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ の導関数を求めなさい.

10-3 テキスト 77 ページ, 3.20, 3.21.