2012 年 6 月 21 日 (2012 年 6 月 28 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 9

お知らせ

- 中間試験の答案を返却します．返却答案には，定期試験の予告および持ち込み用紙が綴じられています．本日受け取れなかった方は 6 月 29 日までに**数学事務室** (本館 3 階 332B) にて受け取って下さい．
- 問題 D @中間試験にいただいたご意見，ご希望は近日中に講義 web ページおよび OCW にて（コメント付きで）公開します．—今回は間に合いません `orz`

中間試験の補足

- 解答例（コメント付き）を更新しました．講義 web ページ，OCW より確認してください．解答の記述については正解にある程度，幅をもたせたつもりですが，解答例の記述が標準だと思います．文字の使い方，記号の使い方，太字や括弧の使い方など，注意してみて下さい．ご自分の解答が正解にされていたとしても解答例と違った記述になっていた場合は，その違いはどこか，どうして解答例の形が標準になっているか，を確かめて下さい．定期試験ではもう少し正解の幅を狭くするかもしれません．
- 検算をしようね．

前回までの訂正

- 講義資料 8, 6 ページ，問題 8-3：

$$\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\right)$$

9 余因子と行列式の展開

今回は $A, B, \ldots$ で n 次正方行列 ($n \geqq 2$) を表す.

■行列式の性質 (復習)

- 行列 A の一つの行 (列) を一斉に c 倍すると，行列式は c 倍になる.
  (テキスト 57 ページ，定理 3.5 (R1); テキスト 64 ページ，定理 3.15 (C1)).
  ($\Rightarrow$ 一つの行 (列) がすべて 0 である行列の行列式は 0).
- 行列 A の 2 つの行 (列) を入れ替えると，行列式は (-1) 倍になる.
  (テキスト 57 ページ，定理 3.5 (R2); テキスト 64 ページ，定理 3.15 (C2)).
  ($\Rightarrow$ 2つの行 (列) が一致する行列の行列式は 0).
- 行列 A のある行 (列) に他の行 (列) のスカラ倍を加えても行列式の値はかわらない.
  (テキスト 57 ページ，定理 3.5 (R2); テキスト 64 ページ，定理 3.15 (C2)).
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を n 個の n 次列ベクトル，$\boldsymbol{b}$ を n 次列ベクトルとするとき，

$$\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = \det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n] + \det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}_n].$$

  (テキスト 63 ページ，定理 3.12 (2)).
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を n 個の n 次行ベクトル，$\boldsymbol{b}$ を n 次行ベクトルとするとき，

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

  (テキスト 55 ページ，定理 3.2 (1)).
- (テキスト 58 ページ，定理 3.6; 64 ページ，定理 3.16)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

  ($\Rightarrow$ 上 (下) 三角行列の行列式は対角成分の積, とくに対角行列の行列式は対角成分の積.)
- $\det({}^tA) = \det A$ (テキスト 62 ページ，定理 3.11)
  ($\Rightarrow \det(A^*) = \overline{\det A}$, 中間試験 問題 C (7)).
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ (テキスト 60 ページ，定理 3.8)
- A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$. (テキスト 61 ページ，定理 3.9)

2012 年 6 月 21 日 (2012 年 6 月 28 日訂正)

■例題　以下，A, B, C, D を n 次正方行列とする：

$$\det\begin{bmatrix} I & B \\ O & D\end{bmatrix} = \det D, \qquad \det\begin{bmatrix} A & B \\ O & I\end{bmatrix} = \det A, \qquad \det\begin{bmatrix} A & B \\ O & D\end{bmatrix} = (\det A)(\det D).$$
$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A\end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B), \qquad \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix} = \det(A)\det(D-CA^{-1}B).$$

ただし，最後の等式では A は正則とする．

■余因子と余因子行列　n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して

$$\tilde a_{ij} := (-1)^{i+j}\det[A \text{ の } i \text{ 行と } j \text{ 列をのぞいてできる } (n-1) \text{ 次正方行列}]$$

を A の (i,j) **余因子** cofactor という (テキスト 67 ページ)．さらに

$$\widetilde A = {}^t[\tilde a_{ij}] = \begin{bmatrix} \tilde a_{11} & \dots & \tilde a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde a_{1n} & \dots & \tilde a_{nn}\end{bmatrix}$$

すなわち，A の余因子を並べて**転置をとった**行列を A の**余因子行列** cofactor matrix という．(テキスト 69 ページ).

■余因子展開

定理 9.1 (テキスト 67 ページ, 定理 3.18)**.** n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ の (i,j) 余因子を $\tilde a_{ij}$ と書くと，各 l $(1 \leqq l \leqq n)$ に対して

$$\det A = a_{l1}\tilde a_{l1} + \cdots + a_{ln}\tilde a_{ln} = \sum_{k=1}^n a_{lk}\tilde a_{lk},$$
$$\det A = a_{1l}\tilde a_{1l} + \cdots + a_{nl}\tilde a_{nl} = \sum_{k=1}^n a_{kl}\tilde a_{kl}$$

が成り立つ．

系 9.2 (テキスト 68 ページ, 定理 3.19)**.** n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ の (i,j) 余因子を $\tilde a_{ij}$ と書くと，各 l, m $(1 \leqq l, m \leqq n)$ に対して

$$a_{l1}\tilde a_{m1} + \cdots + a_{ln}\tilde a_{mn} = \sum_{k=1}^n a_{lk}\tilde a_{mk} = \delta_{lm}\det A,$$
$$a_{1l}\tilde a_{1m} + \cdots + a_{nl}\tilde a_{nm} = \sum_{k=1}^n a_{kl}\tilde a_{km} = \delta_{lm}\det A$$

が成り立つ．ただし δ_{lm} はクロネッカーのデルタ記号である．

系 9.3 (テキスト 69 ページ)**.** 正方行列 A の余因子行列 $\widetilde A$ は

$$A\widetilde A = \widetilde A A = (\det A)I$$

を満たす．

問題

9-1 2 次のユニタリ行列で，行列式が $e^{i\theta}$ (θ は実数) となるものをすべてあげなさい.

9-2 2 次正方行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は $\widetilde{A} = (\operatorname{tr} A)I - A$ で与えられる.

9-3 各成分 $a_{ij}(t)$ が t の微分可能な関数であるような正方行列 $A(t) = [a_{ij}(t)]$ に対して

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \operatorname{tr}\left(\widetilde{A}(t)\frac{dA(t)}{dt}\right).$$

9-4 二つの 3 次列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad \left(\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right)$$

で定まる列ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積** outer product または **ベクトル積** vector product という．ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ と書くとき，任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して次が成り立つことを確かめなさい：

- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0, \qquad \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0.$
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.
- $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.
- $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{o}$.
- 一般に $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ と $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ は等しくない.

9-5 $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2, a_3]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, b_2, b_3]$ に対して $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle := -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ と定める．平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle = 0$, $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\rangle = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい．（ヒント：上の問いの結果を少しもじる).

9-6 テキスト 75 ページ 3.5, 77 ページ 3.17. その他行列式の計算もろもろ.