申告番号 0187, 3666 -「合理的思考の技術」
試験レポート問題

担当　小林憲正

提出期限7月５日（火）14:50

試験開始前に以下の注意を無視せずによく読むこと！！！！

- 提出方法が電子ファイルでもオーケー
（http://www.valdes.titech.ac.jp/~nkoba/rationalanalysis/syllabus/assignment.html#submission 参照）
なので、回答用紙なども、各自自由に工夫すること。
ハードコピー（もしくは手書き）で提出する人は：
  - 回答用紙は裏も使用すること。
  - 通常のレポート同様、左上をホチキスで閉じて提出すること。
  - 日本語で回答する部分はプリントアウト、数式や図は手書きという形式もオーケー。
- 大問5つのうち、3問 選択して回答せよ。（4問以上回答した人は0点）
- 回答用紙左上に回答する大問の番号を（）つきで明記せよ。
回答用紙1枚に大問2つ以上回答しないこと。
1つの大問に回答用紙を2枚以上使う人は、2枚目以降大問番号と続きであることを明記すること。
- 説明が中心の小問は簡潔な回答でオーケー。
数式や図の扱いが必要とされる問題は、特に注意書きがない限り、最終的な解やグラフの概形のみならず、導出過程も簡単に記せ。
- 常識の範囲内であれば、数式の中で説明抜きで略称を使ってオーケー。
（例：　大岡山 → 大）
- 回答にあたってなにを参照するのも自由。
- 締切りまで、質問などあれば、電子メールその他、ウエブサイトに掲載してある連絡手段で連絡されたし。
特に、7月５日（火）8:00 - 12:00 をオフィスアワーとする。研究室に直接質問をしに来るのもオーケーです。

1

以下の利得双行列で表される鹿狩り stag hunt ゲームを考える

1 \ 2	C	D
C	9, 9	0, 8
D	8, 0	7, 7

上記のゲームに関連して、以下の問いに答えよ。

1. 純粋戦略のナッシュ均衡を全て記せ。(今回の講義では扱っていない混合戦略のナッシュ均衡は求めなくて良い)

2. プレーヤー1 はプレーヤー2 が C, D のどちらをとるか分からないとする。1 の心的モデルの中で 2 が C をとる確率を $p_2 \in [0,1]$ とおく。このとき、p_2 に対するプレーヤー1 の最適応答 best response と、その時に得られる期待効用を求めよ。(ヒント - p_2 の値によって、最適解が異なるので、場合分けせよ)

3. 事前にどちらの戦略をとるかの約束ができたとする。約束がチープトークである場合、拘束力のある約束の必要条件を一つ述べ、本問のゲームにおける有効な約束の候補を示せ。

4. 約束のご利益の一つに、その情報の価値がある。前問で得られた約束が持つ完全情報の価値の期待値 EVPI を、小問2の結果を比較静学分析的に用いて議論せよ。

5. (C, C) は、理論的には必ずしも約束として意味を持つとは言えない。その背景を説明せよ。

6. 本問の鹿狩りゲームは、チープトークが均衡選択に果たす役割を見る上で有名な例であるが、均衡選択には人間関係の親密さも影響しているかもしれない。鹿狩りゲームにおけるコミュニケーションと人間関係の関係性について、自分なりの見解を述べよ。(本小問には単一の正解はない)

個人 $i = 1, ..., n$ を属性とみなして、集団意思決定を多属性意思決定としての定式化してみよう。選択肢の有限集合 $X = \{x_1, ..., x_K\}$、主体 i の効用関数を $u_i : X \to \Re$ とする。

以下の問題に答えよ。

1. 関数 $u_i : X \to \Re$ を、i にとってもっとも望ましい選択肢に K、その次に望ましい選択肢に $K-1$、以下同様... 、もっとも望ましくない選択肢に 1 と定める。

   この評価値の振り方が序数効用となっていることを説明せよ。

2. $u_1 u_2$ 空間上のパレート順序が半順序関係であることを証明せよ。

3. 小問 1 で定められた効用関数 u_i を主体について足した点数 $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ を社会的効用とみなし、これを最大化することによって集団意思決定を行う方式をボルダ (Borda) 方式という。

   ボルダ方式がパレート効率的であることを示せ。

4. 講義では、多数決によって得られる集団意思決定を特徴付ける社会的選好が必ずしも合理的にならないことをコンドルセのパラドックスによって示した。ボルダ方式にも、似たような問題がある。

   まず、選択肢の部分集合がペア $Y = \{x_1, x_2\}$ の場合を考える。これに、新たに選択肢 x_3 を追加して、別の選択肢部分集合 $Y' = \{x_1, x_2, x_3\}$ を作ろう。コンドルセのパラドックスのように主体の選択肢評価を工夫することにより、主体の x_1, x_2 に関する好みの順序は変わらないにも関わらず、ボルダ方式による社会的効用 $u(x_1), u(x_2)$ の大小が Y, Y' からの選択それぞれにおいて逆転する実例を示せ。

5. Arrow の定理を考慮すると、独裁制を除き、ボルダ方式の問題点を根本的に取り除くのは困難に見える。そこで、小問 1 まで遡り、u_i を基数効用とするによって、独裁制でない合理的な社会的効用関数 u を構成する必要がある。この決め方では、投票制度と異なり、効用の個人間比較の問題が生じる。特に u_i の単位変換（定数倍）が許容変換となるような u の関数形を求めよ。（u_i の原点移動は行わないとする）

3

二人のプレーヤー1, 2 によるケーキの分配を考える。プレーヤー$i(=1,2)$ が受け取るケーキの配分の割合を $x_i \in [0,1]$ 、配分 x_i から受ける基数効用を $u_i(x_i) = \alpha_i\sqrt{x_i}$ とする。ただし、$\alpha_i > 0$ は、プレーヤーi のケーキの好みを表す係数。

以下の問いに答えよ。数学が得意な人が解析的に回答することは大歓迎だが、図解で回答してもオーケー。

1. $u_i(i=1,2)$ がリスク回避的 risk averse であることを示せ。

2. ケーキ分配による効用可能集合 UPS を解析的に求め、u_1, u_2 空間上に描け。

3. 分配を交渉で決めることを考える。功利主義的効用関数 utilitarian utility

$$u(u_1, u_2) = u_1 + u_2$$

   を交渉集合内で最大化するという解が交渉問題に関する単調性 issue monotonicity を満たさないことを、反例を一つ示すことにより示せ。

4. これ以降の小問では、Kalai (1977) の一定比率解 proportional solution のうち、特に平等分配（方向ベクトルが $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ）を考える。
   α_2 を固定し、α_1 を動かすことによって、平等分配 $x = (x_1, x_2)$ はどのように変化するか？比較静学分析的に議論せよ。

5. 平等分配は一見すると合理的な分配方法（解）に見えるが、必ずしも万能とは言えない。様々な分配方法は一長一短であると言える。問題状況に応じて使い分けるのが良さそうだ。
   特に、プレーヤー1, 2 の協力関係が長期に渡り、お互い信用できていて、交渉問題の単調性を気にする必要がないとしよう。最も簡単な場合として、次の二つのケーキを考えよう。

   ・ケーキ 1 - $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 1$

   ・ケーキ 2 - $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 10$

   ケーキ2つを消費したときの各プレーヤーの効用は、それぞれのケーキを消費したときに得られる効用の和で与えられるとする。それぞれのケーキを平等分配して得られる結果が非効率的であることを議論せよ。

4

次のチキンゲームの無限回繰り返しゲームを考える。

1 \ 2	C	D
C	3, 3	2, 5
D	5, 2	0, 0

利得を

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T} u_i(x^t)/T$$

とする。

上記のゲームに関連して、以下の問いに答えよ。

1. ステージゲームのナッシュ均衡を求めよ。
2. フォーク定理 folk theorem をふまえて、(C, C) を無限回繰り返すことがナッシュ均衡の結果となるような各プレーヤーの戦略の組を一つ説明せよ。(注　繰り返す合意のみならず、他のプレーヤーが合意から逸脱した場合の制裁も記述すること)
3. 達成可能な利得の組 feasible payoff profile の集合を求め、u_1u_2 空間上に図示せよ。
4. 前小問の結果を踏まえ、パレート効率的なナッシュ均衡を一つ示せ。
5. 無限回繰り返しゲームのように、同じ意思決定状況に多数直面する主体は、フォーク定理を明示的に意識することなく、はるかに簡略化された心的モデルに基づいて意思決定することも容易に想定される。(C, D) のみが無限回繰り返されるナッシュ均衡を特徴付ける心的モデルで、ゲームそれ自体以外の候補を一つ挙げよ。
6. Bergstrom (1999) の思いやりのモデルの安定解として、プレーヤーがステージゲームから得る思いやりを含めた効用 $U_1 = u_1 + \lambda_1 u_2, U_2 = u_2 + \lambda_2 u_1$ を考える($\lambda_i (i = 1, 2)$ は思いやりの度合い)。

   思いやりの度合い λ_i を $0 \leq \lambda_i \leq 1$ の範囲で自分で適当に固定し、思いやりを含むステージゲームのナッシュ均衡を求めよ。

   このステージゲームの分析とフォーク定理の関係を議論せよ。

5

以下の囚人のジレンマ prisoners' dilemma ゲームが物質的利得であるようなゲームをプレーする思いやりのあるプレーヤー1, 2 によるプレーを考える。ただし、$U_1 = u_1 + (1/2)u_2, U_2 = u_2 + (1/2)u_1$

1 \ 2	C	D
C	3, 3	−2, 4
D	4, −2	1, 1

以下の問に答えよ。

1. 各プレーヤーが相手も思いやりがあることを知らない場合のそれぞれのプレーヤーの主観ゲームとそのナッシュ均衡を求めよ。

2. 前問の主観ゲームのナッシュ均衡の安定性を確認せよ。

3. U_1, U_2 の利得双行列とナッシュ均衡を求めよ。

4. 以上を踏まえ、本問の実例において有効と考えられるコミュニケーションの役割について簡単に議論せよ。

5. 帰納的ゲーム inductive game に関する講義では、ゲームの利得と全く無関係のラベルが意思決定で意味を持ってしまうことがあり得ることを説明した。本問では、その具体例を見てみる。

   思いやりのある多数のプレーヤーの集合 N の中から、ランダムに二人が出会って上記のゲームをプレーすることが繰り返されている状況を考える(つまり、ペアはその都度変わる)。ただし、各プレーヤーは一般には相手も思いやりがあるということを知らないとする。

   このとき、$N = N_1 \cup N_2$ という二つのグループそれぞれのメンバーにとって
   「自分の属するグループのメンバーは思いやりがあり、他のグループメンバーは思いやりがない」
   という心的モデルが反証されない可能性があることを、前問までの分析を踏まえて説明せよ。

   (なお、本小問は帰納的ゲームの知識によらず回答可能である)