

シャーププレイ値の応用

費用分担への応用

投票による意思決定への応用

費用分担ゲーム

練習問題2－3

同じ方向に家のあるA, B, Cの3人が大岡山駅からタクシーに相乗りし一番遠くに家のあるCが料金を支払っておき, 翌日清算することにした。メーターでは, Aの家までは1200円, Bの家までは2000円であり, 最終的にCの家までは, 2500円かかった。シャープレイ値の考え方に従えば, A及びBは, 翌日いくらずつCに支払えばよいか。また, 仁の考え方ではどうか。

特性関数(費用軽減量)

$$v(ABC) = (1200+2000+2500) - 2500 = 3200$$

$$v(AB) = (1200+2000) - 2000 = 1200, v(AC) = 1200, v(BC) = 2000$$

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

費用分担ゲーム

特性関数(費用軽減量)

$$v(ABC) = 3200, v(AB) = 1200, v(AC) = 1200, v(BC) = 2000$$

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

貢献度

	A	B	C
A←B←C	0	1200	2000
A←C←B	0	2000	1200
B←A←C	1200	0	2000
B←C←A	1200	0	2000
C←A←B	1200	2000	0
C←B←A	1200	2000	0
	4800/6	7200/6	7200/6

シャーププレイ値
(800, 1200, 1200)

費用分担
(400, 800, 1300)

費用分担ゲーム

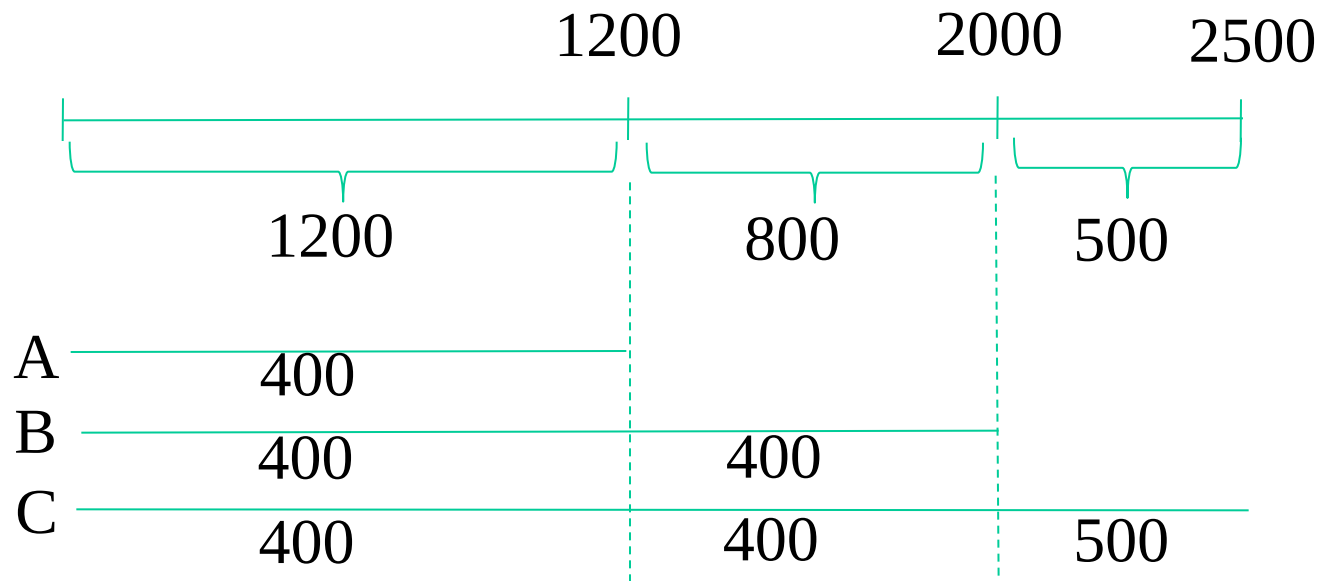
特性関数(費用軽減量)

$$v(ABC) = 3200, v(AB) = 1200, v(AC) = 1200, v(BC) = 2000$$

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

シャープレイ値 (800, 1200, 1200)

費用分担 (400, 800, 1300)



節約ゲームと費用ゲーム

節約ゲーム(費用軽減量)

$$v(ABC) = 3200, v(AB) = 1200, v(AC) = 1200, v(BC) = 2000$$

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

費用ゲーム(費用)

$$C(ABC) = 2500, C(AB) = 2000, C(AC) = 2500, C(BC) = 2500$$

$$C(A) = 1200, C(B) = 2000, C(C) = 2500$$

$$v(S) = \sum_{i \in S} C(\{i\}) - C(S) \quad x_i = C(\{i\}) - c_i \quad i = A, B, C$$

$$(c_A, c_B, c_C) \in C \text{ のコア} \leftrightarrow \sum_{i \in S} c_i \leq C(S) \quad \forall S \subseteq \{A, B, C\}$$

$$\sum_{i \in S} c_i \leq C(S) \leftrightarrow \sum_{i \in S} C(\{i\}) - \sum_{i \in S} x_i \leq C(S)$$

$$\leftrightarrow \sum_{i \in S} x \geq \sum_{i \in S} C(\{i\}) - C(S) \quad i = v(S)$$

シャープレイ値	v 費用軽減	(800, 1200, 1200)
	C 費用	(400, 800, 1300)

滑走路の補修費用の分担

ある空港を3つの航空会社A, B, Cが利用している。それぞれ小型機, 中型機, 大型機の3種類の飛行機を保有しており, 1年あたりの離着陸回数は, 以下のとおりである。

A: 大型機300回, 中型機200回, 小型機100回

B: 大型機200回, 中型機200回, 小型機100回

C: 大型機100回, 中型機100回, 小型機200回

この空港の3000mの滑走路のうち, 大型機は3000mすべてを, 中型機は2500mを, 小型機は1500mを利用する。この空港では, 1年に1回, 滑走路の補修を行う。その際には3000mの滑走路すべてを同じように補修しなければならず, 1mあたり10万円の費用を要する。

(問題) 補修費用の総額 $10万 \times 3000 = 3億円$ を, A, B, C3社でどのように分担すればよいか?

費用ゲームとしての定式化

プレイヤー：各飛行機の各離着陸 1500人ゲーム

N_B, N_M, N_S :

大型機(B), 中型機(M), 小型機(S)のプレイヤーの集合

$$|N_B| = 600, |N_M| = 500, |N_S| = 400$$

$$N = N_B \cup N_M \cup N_S$$

費用関数

$$c_B = 30, c_M = 25, c_S = 15 \text{ (単位: 千万円)}$$

$$C(S) = \max \{ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset, i = B, M, S \}$$

公理によるシャープレイ値の解法

N_B, N_M, N_S : 大型機(B), 中型機(M), 小型機(S)のプレイヤーの集合

$$|N_B| = 600, |N_M| = 500, |N_S| = 400$$

$$N = N_B \cup N_M \cup N_S$$

$$C(S) = \max \{ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset, i = B, M, S \} \quad c_B = 30, c_M = 25, c_S = 15$$

$$(N, C_B) \quad C_B(S) = \begin{cases} c_B - c_M & S \cap N_B \neq \emptyset \\ 0 & S \cap N_B = \emptyset \end{cases}$$

$i \notin N_B \rightarrow i$ は ナルプレイヤー

$i, j \in N_B \rightarrow i, j$ は 対称

$$\phi_i(C_B) = \begin{cases} (c_B - c_M) / |N_B| = (30 - 25) / 600 = 1/120 & i \in N_B \\ 0 & i \notin N_B \end{cases}$$

公理によるシャープレイ値の解法

N_B, N_M, N_S : 大型機(B), 中型機(M), 小型機(S)のプレイヤーの集合

$$|N_B| = 600, |N_M| = 500, |N_S| = 400$$

$$N = N_B \cup N_M \cup N_S$$

$$C(S) = \max \{ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset, i = B, M, S \} \quad c_B = 30, c_M = 25, c_S = 15$$

$$(N, C_M) \quad C_M(S) = \begin{cases} c_M - c_S & S \cap (N_B \cup N_M) \neq \emptyset \\ 0 & S \cap (N_B \cup N_M) = \emptyset \end{cases}$$

$i \notin N_B \cup N_M$ はナルプレイヤー, $i, j \in N_B \cup N_M$ は対称

$$\begin{aligned} \phi_i(C_M) &= (c_M - c_S) / |N_B \cup N_M| \\ &= (25 - 15) / (600 + 500) = 1/110 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} i \in N_B \cup N_M \\ i \notin N_B \cup N_M \end{array}$$

公理によるシャーププレイ値の解法

N_B, N_M, N_S : 大型機(B), 中型機(M), 小型機(S)のプレイヤーの集合

$$|N_B| = 600, |N_M| = 500, |N_S| = 400$$

$$N = N_B \cup N_M \cup N_S$$

$$C(S) = \max \{ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset, i = B, M, S \} \quad c_B = 30, c_M = 25, c_S = 15$$

$$(N, C_S) \quad C_S(S) = c_S \quad S \cap (N_B \cup N_M \cup N_S) = S \cap N \neq \emptyset$$

$i, j \in N_B \cup N_M \cup N_S$ は対称

$$\phi_i(C_S) = c_S / |N| = 15 / (600 + 500 + 400) = 1/100 \quad i \in N$$

$$(N, C) \quad C(S) = C_B(S) + C_M(S) + C_S(S) \quad \forall S \subseteq N$$

ゲームの和に関する性質

$$\begin{aligned} \rightarrow \phi_i(C) &= 1/120 + 1/110 + 1/100 & i \in N_B \\ &= 1/110 + 1/100 & i \in N_M \\ &= 1/100 & i \in N_S \end{aligned}$$

シャーププレイ値による各社の費用分担

N_B, N_M, N_S : 大型機(B), 中型機(M), 小型機(S)のプレイヤーの集合

$$|N_B| = 600, |N_M| = 500, |N_S| = 400$$

$$N = N_B \cup N_M \cup N_S$$

$$C(S) = \max \{ c_i \mid S \cap N_i \neq \emptyset, i = B, M, S \} \quad c_B = 30, c_M = 25, c_S = 15$$

$$(N, C) \quad C(S) = C_B(S) + C_M(S) + C_S(S) \quad \forall S \subseteq N$$

$$\begin{aligned} \phi_i(C) &= 1/120 + 1/110 + 1/100 & i \in N_B \\ &= 1/110 + 1/100 & i \in N_M \\ &= 1/100 & i \in N_S \end{aligned}$$

A社: 大型機300, 中型機200, 小型機100回

$$\rightarrow 300(1/120 + 1/110 + 1/100) + 200(1/110 + 1/100) + 100 \times (1/100)$$

B, C社も同様

2007年7月参議院選挙前後の各政党の議席数 (参議院HPより)

	166国会最終日 (7/5)	167国会最終日 (8/10)
自由民主党	109	85
民主党・新緑風会	83	112
公明党	23	20
日本共産党	9	7
社会民主党・護憲連合	6	5
国民新党	4	4
無所属	6	9
計	240(欠2)	242
	(過半数 121)	(過半数 122)

2005年7月都議会議員選挙前後の
各政党の議席数（東京新聞HP及び参議院HPより）

	選挙前	選挙後	(2008.2.12)
自由民主党	51	48	48
公明党	21	23	22
民主党	19	35	34
日本共産党	15	13	13
生活者ネットワーク	6	3	4
諸派	1	1	0
無所属	4	4	4
計	117	127	125
(過半数)	59	64	63)

投票ゲーム

(N, v) が単純ゲーム $\leftrightarrow v(S) = 1$ または $0 \quad \forall S \subseteq N$

(N, v) が投票ゲーム $\leftrightarrow$

(1) 単純ゲーム

(2) $v(N) = 1$

(3) $v(S) = 1, S \subseteq T \rightarrow v(T) = 1$

(4) $v(S) = 1 \rightarrow v(N-S) = 0$

$v(S) = 1 \rightarrow S : \underline{\text{勝利提携}} \quad v(S) = 0 \rightarrow S : \underline{\text{敗北提携}}$

$\mathbf{W} = \{S \subseteq N \mid S \text{ は勝利提携}\}$ とすると,

(2)は, $N \in \mathbf{W}$

(3)は, $S \in \mathbf{W}, S \subseteq T \rightarrow T \in \mathbf{W}$

(4)は, $S \in \mathbf{W} \rightarrow N - S \notin \mathbf{W}$

投票ゲーム

$S \subseteq N$ が最小(極小)勝利提携 $\leftrightarrow S \in \mathbf{W}$ かつ $T \notin \mathbf{W} \ \forall T \subset S$

$\mathbf{W}^m = \{S \subseteq N \mid S \text{ は最小勝利提携}\}$

S が最小勝利提携 $\rightarrow v(S) = 1, v(S - \{i\}) = 0 \ \forall i \in S$

$i \in N$ が ナル(ダミー)プレイヤー

$\leftrightarrow v(S) = v(S - \{i\}) = 0$ または $v(S) = v(S - \{i\}) = 1 \ \forall i \in S$

ナルプレイヤーは最小勝利提携に入ることはない

$i \in N$ が 拒否権を持つプレイヤー $\leftrightarrow i \in S \ \forall S \in \mathbf{W}$

$i \in N$ が独裁者 $\leftrightarrow \mathbf{W} = \{S \subseteq N \mid i \in S\}$

独裁者 $\rightarrow$ ナルプレイヤー (← は必ずしも成り立たない)

投票ゲーム (N, v) が全員一致ゲーム $\leftrightarrow \mathbf{W} = \{N\}$

重み付き多数決ゲーム

重み付き多数決ゲーム $(q; w_1, w_2, \dots, w_n)$

q : 必要票数

w_i : 投票者 i のもつ票数

$$\rightarrow \mathbf{W} = \{S \subseteq N \mid \sum_{i \in S} w_i \geq q\}$$

$(q; w_1, w_2, \dots, w_n)$ が投票ゲーム

$$\leftrightarrow \sum_{i \in N} w_i \geq q > \sum_{i \in N} w_i / 2$$

3人多数決ゲーム(事例6-1) $\rightarrow (2; 1, 1, 1), \dots$

1が拒否権を持つ3人拒否権ゲーム $\rightarrow (3; 2, 1, 1), (4; 3, 1, 1), \dots$

実際の投票ゲーム

2007年7月参議院:

	自	民	公	共	社	国	無
選挙前	(121 ; 109,	83,	23,	9,	6,	4,	1,1,1,1,1,1)
選挙後	(122 ; 85,	112,	20,	7,	5,	4,	1,1,1,1,1,1,1,1,1)

2005年7月都議会:

	自	民	公	共	社	諸	無
選挙前	(59 ; 51,	21,	19,	15,	6,	1,	1,1,1,1)
選挙後	(64 ; 48,	23,	35,	13,	3,	1,	1,1,1,1)

国連安全保障理事会:

常任理事国(5力国)と非常任理事国4力国以上の賛成→可決

常任

非常任

(39 ; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

(44 ; 8, 8, 8, 8, 8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) ...

投票ゲームのシャーププレイ値 (シャーププレイ・シュービック(SS)指数)

3人拒否権ゲーム (3 ; 2, 1, 1)

$$v(S) = 1 \quad S = \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$$

$$= 0 \quad \text{その他の } S$$

貢献度

	1	2	3	
1←2←3	0	1	0	
1←3←2	0	0	1	貢献度が1の投票者 → <u>ピヴォット</u> (各順列にピヴォットは1人)
2←1←3	1	0	0	
2←3←1	1	0	0	
3←1←2	1	0	0	
3←2←1	1	0	0	

シャーププレイ値 (4/6, 1/6, 1/6)

シャーププレイ・シュービック(SS)指数

シャーププレイ・シュービック(SS)指数の公式

プレイヤー i のシャーププレイ値

$$(1/n!) \sum_{S \subseteq N, i \in S} (s-1)! \times (n-s)! (v(S) - v(S - \{i\}))$$

$$v(S) - v(S - \{i\}) = 1 \leftrightarrow S \in \mathbf{W} \text{ かつ } S - \{i\} \notin \mathbf{W}$$

$$\text{それ以外の場合は } v(S) - v(S - \{i\}) = 0$$

従って, プレイヤー i のシャーププレイ・シュービック指数

$$(1/n!) \sum_{S \in \mathbf{W}, S - \{i\} \notin \mathbf{W}} (s-1)! \times (n-s)!$$

国連安全保障理事会におけるSS指数

常任理事国(5力国)と非常任理事国10力国のうち4力国以上
→ 勝利提携

常任理事国:

ピヴォットになるのは, すでに他の常任理事国4力国すべてと
非常任理事国4力国以上が加わっている場合

従って, 常任理事国1力国の SS指数は

$$(1/15!) \sum_{k=4}^{10} {}_{10}C_k \times (4+k)! \times (10-k)! = 421/2145 \cong 0.196$$

非常任理事国1力国の SS指数は

$$(1-(421/2145) \times 5)/10 \cong 0.002$$

SS指数のパラドックス

分裂のパラドックス

(5 ; 3, 3, 3) SS指数は (1/3, 1/3, 1/3)

(5 ; 3, 3, 1, 1, 1) SS指数は (9/30, 9/30, 4/30, 4/30, 4/30)

プレイヤー3は, 分裂することにより

$1/3 \rightarrow 3 \times (4/30) = 12/30$ 増加

新規参加者のパラドックス

(4 ; 3, 2, 2) SS指数は (1/3, 1/3, 1/3)

(5 ; 3, 2, 2, 1) SS指数は (5/12, 3/12, 3/12, 1/12)

プレイヤー1は, 4が新たに加わることにより

$1/3 \rightarrow 5/12$ 増加

注意: (4 ; 3, 2, 2), (5 ; 3, 2, 2, 1) はいずれも多数決ルール

プレイヤー1の票数の割合 $3/7 \rightarrow 3/8$ に減少

2007年7月参議院選挙前後の 各政党の議席数とSS指数

	166国会最終日(7/5)		167国会最終日(8/10)	
	議席数	SS	議席数	SS
自民党	109	0.488	85	0.116
民主党	83	0.146	112	0.527
公明党	23	0.146	20	0.116
共産党	9	0.092	7	0.079
社民党	6	0.042	5	0.045
国民新党	4	0.038	4	0.033
無所属	6	0.008	9	0.010
計	240		242	
(過半数	121		122)	

(無所属は、議員1人あたりの指数)

2005年7月都議会議員選挙前後の 各政党の議席数とSS指数

	選挙前		選挙後	
	議席数	SS	議席数	SS
自民党	51	0.550	48	0.426
公明党	21	0.117	23	0.200
民主党	19	0.117	35	0.200
共産党	15	0.117	13	0.093
ネット	6	0.050	3	0.033
諸派	1	0.010	1	0.010
無所属	4	0.010	4	0.010
計	117		127	
(過半数)	59		64)	

(無所属は、議員1人あたりの指数)

現在の衆議院における各政党の議席数
(2011年10月19日現在, 衆議院HPより)

民主党・無所属クラブ	302
自由民主党	118
公明党	21
日本共産党	9
社会民主党・市民連合	6
みんなの党	5
国民新党	5
たちあがれ日本	2
国益と国民の生活を守る会	2
無所属	9

計	479 (欠員1)
---	-----------

(過半数 240)

現在の参議院における各政党の議席数
(2011年11月27日現在, 参議院HPより)

民主党・新緑風会	106
自由民主党・無所属の会	83
公明党	19
みんなの党	11
日本共産党	6
たちあがれ日本・新党改革	5
社会民主党・護憲連合	4
国民新党	3
無所属	5
計	242 (欠員0)
	(過半数 122)

現在の東京都議会における各政党の議席数 (2011年9月14日現在, 東京都議会HPより)

民主党	50
-----	----

自由民主党	38
-------	----

公明党	23
-----	----

日本共産党	8
-------	---

生活者ネットワーク	3
-----------	---

無所属	3
-----	---

計	125 (欠員2)
---	-----------

(過半数	63)
------	-----

中央大学工学部情報工学科
松井知己先生のホームページ

[http://homepage2.nifty.com/TOMOMI/voting/
voting.html](http://homepage2.nifty.com/TOMOMI/voting/voting.html)

次回までの課題

- 1 滑走路補修費用の分担問題について、授業で求めたシャープレイ値がこのゲームのコアに入っていることを示せ。(注意:費用ゲームとして定式化されているので, $\sum_{i \in S} \phi_i(C) \leq C(S) \quad \forall S \subseteq N$ を示せばよい。)
- 2 以下の2つの重み付き多数決ゲームのSS指数を求めよ。
 - (1) (5; 3,3,1,1,1)
 - (2) (5; 3,2,2,1)
- 3 現在の東京都議会における各政党の議員数は以下のとおりである。
民主党 50, 自民党 38, 公明党 23, 共産党 8, 生活者ネット 3, 無所属 3
議案の採択には、議員総数125の過半数である63票の賛成が必要であるとする。このとき、この5政党および無所属議員それぞれのSS指数を、国連安全保障理事会においてSS指数を求めた方法を参考にして求めよ。ただし、政党間のどのような提携も可能であるとする。解答は、結果だけでなく、どのような方法で求めたかも示すこと。