

# ゲーム理論とは

複数の主体が存在するもとの意思決定理論

結果が他の主体の行動にも依存 → ゲーム的状况

2つの大きな流れ

非協力ゲーム理論 → 2年前期「非協力ゲーム理論」  
大学院前期「上級非協力ゲーム理論」

コミュニケーションなし

各主体が独自に行動を決定

企業間の価格競争, 国家の紛争 など

協力ゲーム理論 → 2年後期「協力ゲーム理論」  
大学院後期「上級協力ゲーム理論」

コミュニケーションあり

合意に基づいて契約 — 合意に強制力あり

企業間の合併, 国家間の交渉 など

# ゲーム的状況の表現

## 戦略形ゲーム

意思決定主体

各主体のもつ代替案の選択の計画

各主体の結果に対する評価値

プレイヤー

戦略

利得

## 展開形ゲーム

各プレイヤーの意思決定を

時間の流れとともに木の形で表現

---

特性関数形ゲーム(提携形ゲーム)      協力ゲームの表現

# ゲーム理論の発展

J. von Neumann and O. Morgenstern

“Theory of Games and Economic Behavior” (1944)

2人ゼロ和ゲーム → 戦略形ゲーム, 展開形ゲーム

非協力

ミニマックス行動, 「ミニマックス定理」

{ 2人非ゼロ和ゲーム 協力 → 特性関数形ゲーム  
3人以上のゲーム 安定集合

J.F. Nash (1994 ノーベル経済学賞)

{ 2人非ゼロ和ゲーム 非協力 → ナッシュ均衡  
3人以上のゲーム

2人非ゼロ和ゲーム 協力 → 交渉ゲーム  
ナッシュ交渉解

# ゲーム理論の発展

## プレイヤーの完全な合理性

ゲームの構造に関する完全な情報

他のプレイヤーの行動を熟慮した上での行動決定

(ナッシュ均衡の精緻化 → R. Selten (1994 ノーベル賞))

協力ゲームのさまざまな解 → R.J. Aumann (2005 ノーベル賞),  
L.S. Shapley ...



## 限定合理性

情報の不完備性 → 情報不完備ゲーム

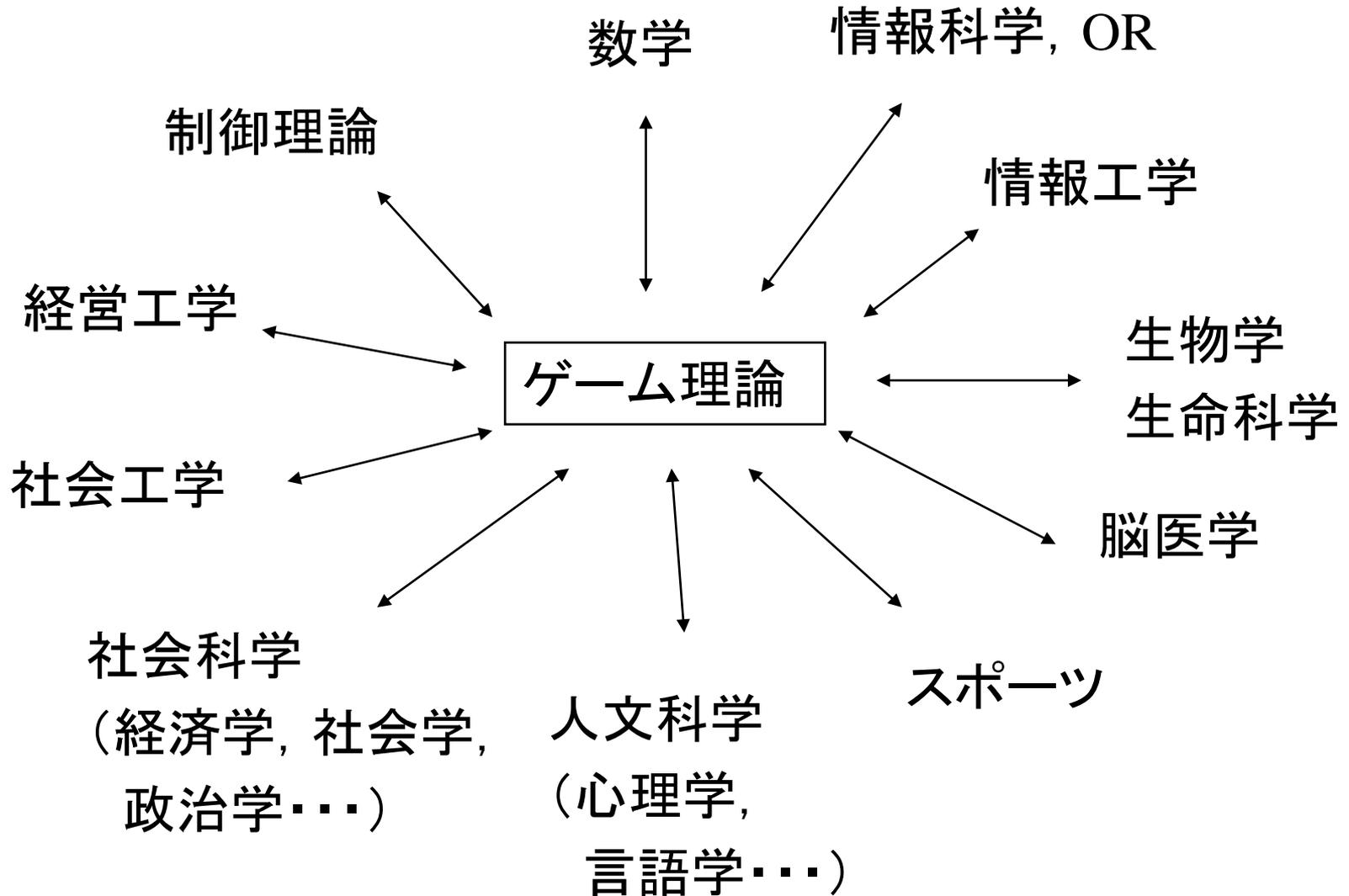
J.C. Harsanyi (1994 ノーベル賞)

単純な意思決定 → 進化論的ゲーム理論,

有限オートマトン, ニューラルネットワーク, 実験ゲーム理論

協力ゲーム, 非協力ゲームの融合

# ゲーム理論と他の分野との関連



# 本授業の概要

## 協力ゲーム

### 2人協力ゲーム

交渉ゲーム

ナッシュ交渉解

### 多人数協力ゲーム

特性関数形ゲーム

コア, 仁, シヤープレイ値

協力ゲーム理論の応用

## 次回までの課題

Reading assignment

「ゲーム理論入門」13ページ～22ページ

## 事例2-2 (規格の統一争い)

	B	X	Y	
A				
X		6 4	0 0	
Y		0 0	4 6	



非協力ゲーム → (X, X), (Y, Y) ナッシュ均衡

協力ゲーム → AとBが話し合ったらどうなるか ?

# 相関(混合)戦略

	B	X	Y	
A				
X		6 4	0 0	
Y		0 0	4 6	

A, B が話し合って,

ともに X をとる (利得 6, 4), ともに Y をとる (利得 4, 6)

それ以外に

表・裏が1/2の確率で出るコイン

表が出れば, A は X, B は X, 裏が出れば, A は Y, B は Y  
(期待利得 5, 5)

→ 相関(混合)戦略

# 相関混合戦略により実現できる利得

	B	X		Y
A				
X		6	4	0
Y		0	0	4

相関混合戦略:

$(X, X), (X, Y), (Y, X), (Y, Y)$  を  $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$  の確率

$$r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22} = 1, \quad r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22} \geq 0$$

期待利得: A  $u_A = 6r_{11} + 0r_{12} + 0r_{21} + 4r_{22} = 6r_{11} + 4r_{22}$

B  $u_B = 4r_{11} + 0r_{12} + 0r_{21} + 6r_{22} = 4r_{11} + 6r_{22}$

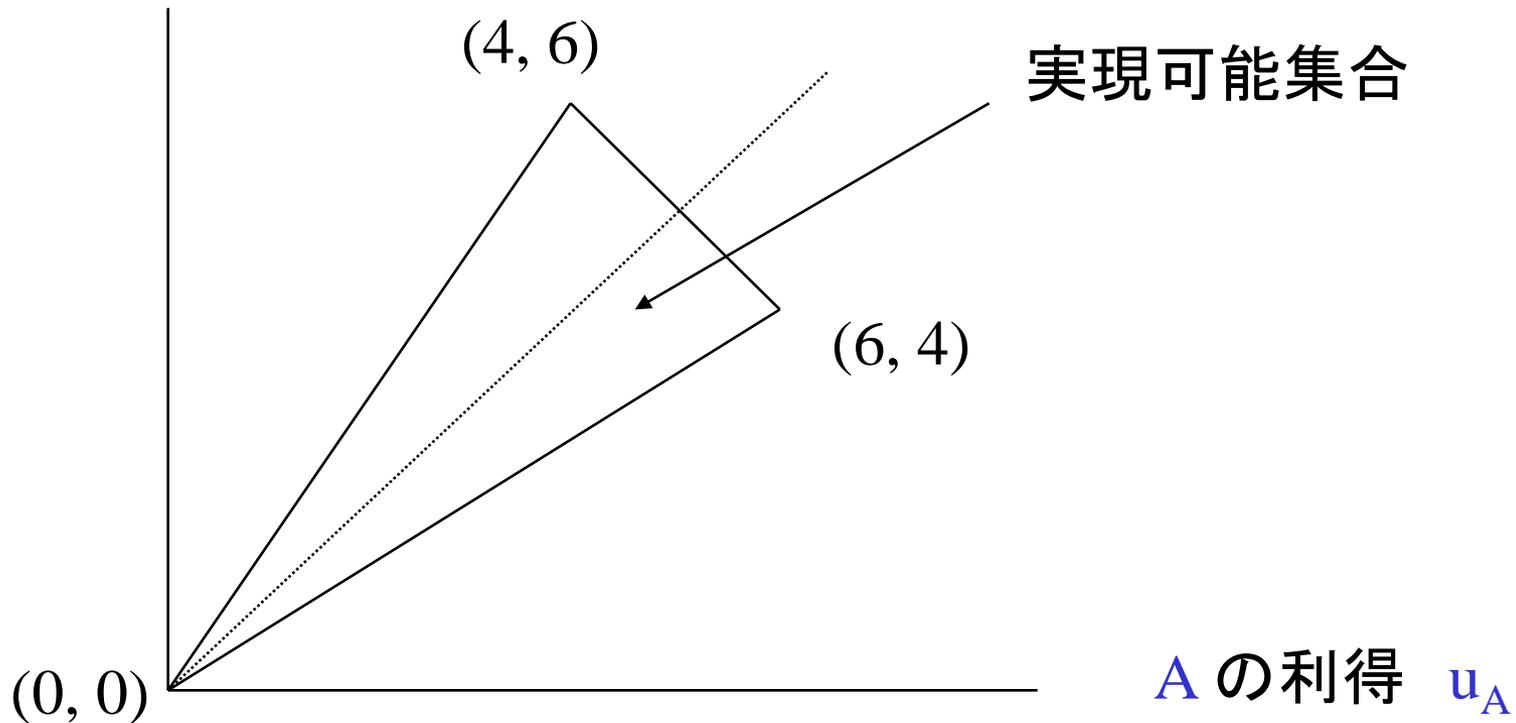
# 実現可能集合

期待利得: A  $u_A = 6r_{11} + 0r_{12} + 0r_{21} + 4r_{22} = 6r_{11} + 4r_{22}$

B  $u_B = 4r_{11} + 0r_{12} + 0r_{21} + 6r_{22} = 4r_{11} + 6r_{22}$

$$r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22} = 1, \quad r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22} \geq 0$$

B の利得  $u_B$



## 2人協力ゲーム（交渉ゲーム）

実現可能集合のうち，話し合いの結果どれが選ばれる(べき)か？

交渉の基準点(話し合いが決裂したときの結果)が必要  
マックスミニ値，ナッシュ均衡の利得など

### 交渉ゲーム

実現可能集合  $R$ ， 交渉の基準点  $(u^0_A, u^0_B)$

→ 交渉の妥結点  $(u^*_A, u^*_B)$  は？

応用例： 価格交渉，賃金交渉，軍縮交渉など

# ナッシュ交渉解と公理系

交渉ゲーム  $(R, u^0 = (u^0_A, u^0_B)) \rightarrow$  妥結点  $u^* = (u^*_A, u^*_B)$

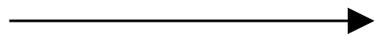
妥結点  $u^* = (u^*_A, u^*_B)$  が満たすべき4つの性質

- 1 パレート最適性
- 2 対称性
- 3 利得の正アフィン変換からの独立性
- 4 無関係な結果からの独立性

→ これらを満たす 妥結点  $u^* = (u^*_A, u^*_B)$  は唯一つに定まる

$$(u^*_A - u^0_A) \times (u^*_B - u^0_B)$$

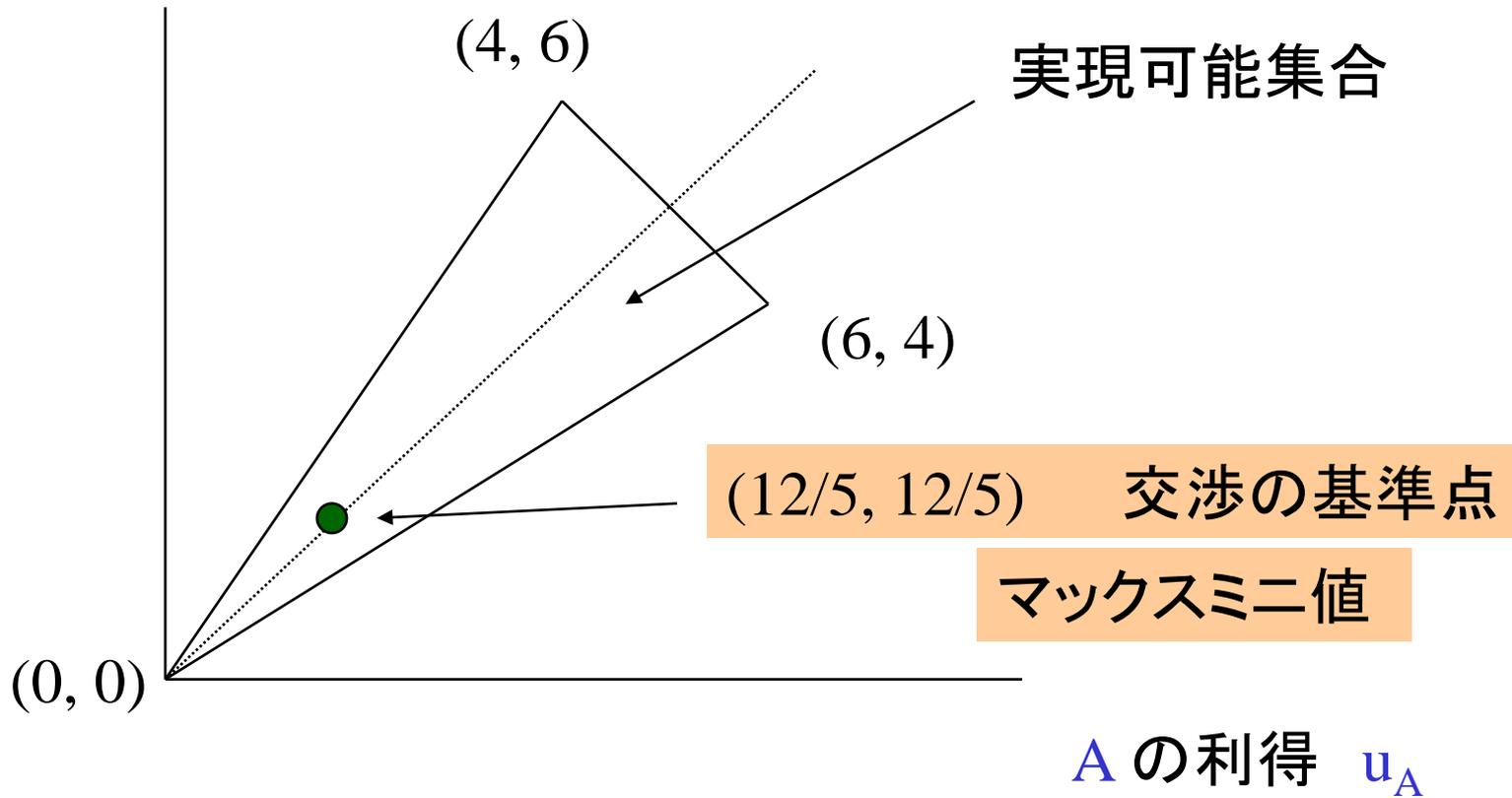
$$= \text{Max} \{ (u_A - u^0_A) \times (u_B - u^0_B) \mid u_A \geq u^0_A, u_B \geq u^0_B \}$$



ナッシュ交渉解(ナッシュ解)

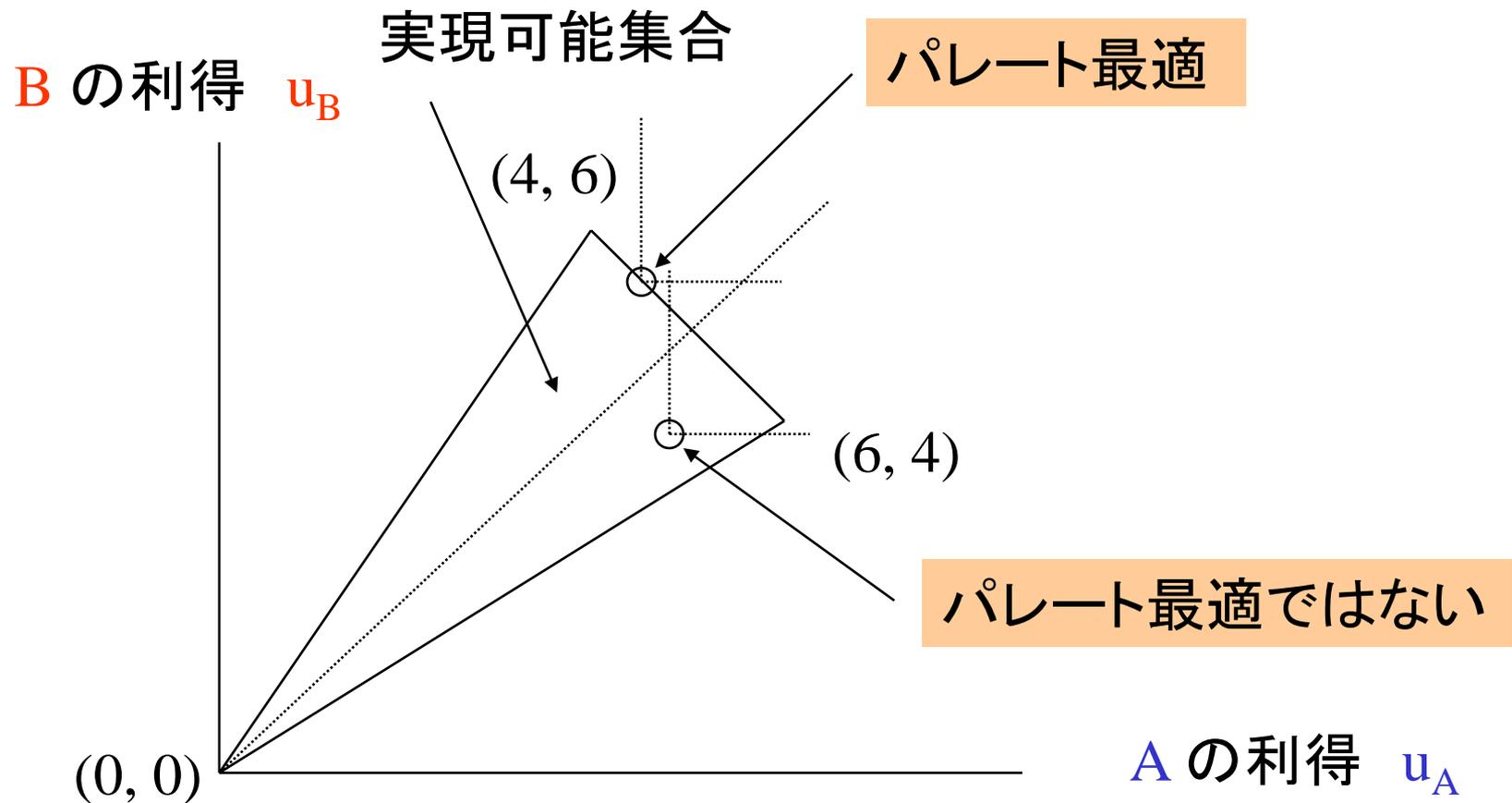
# 事例5-1

B の利得  $u_B$



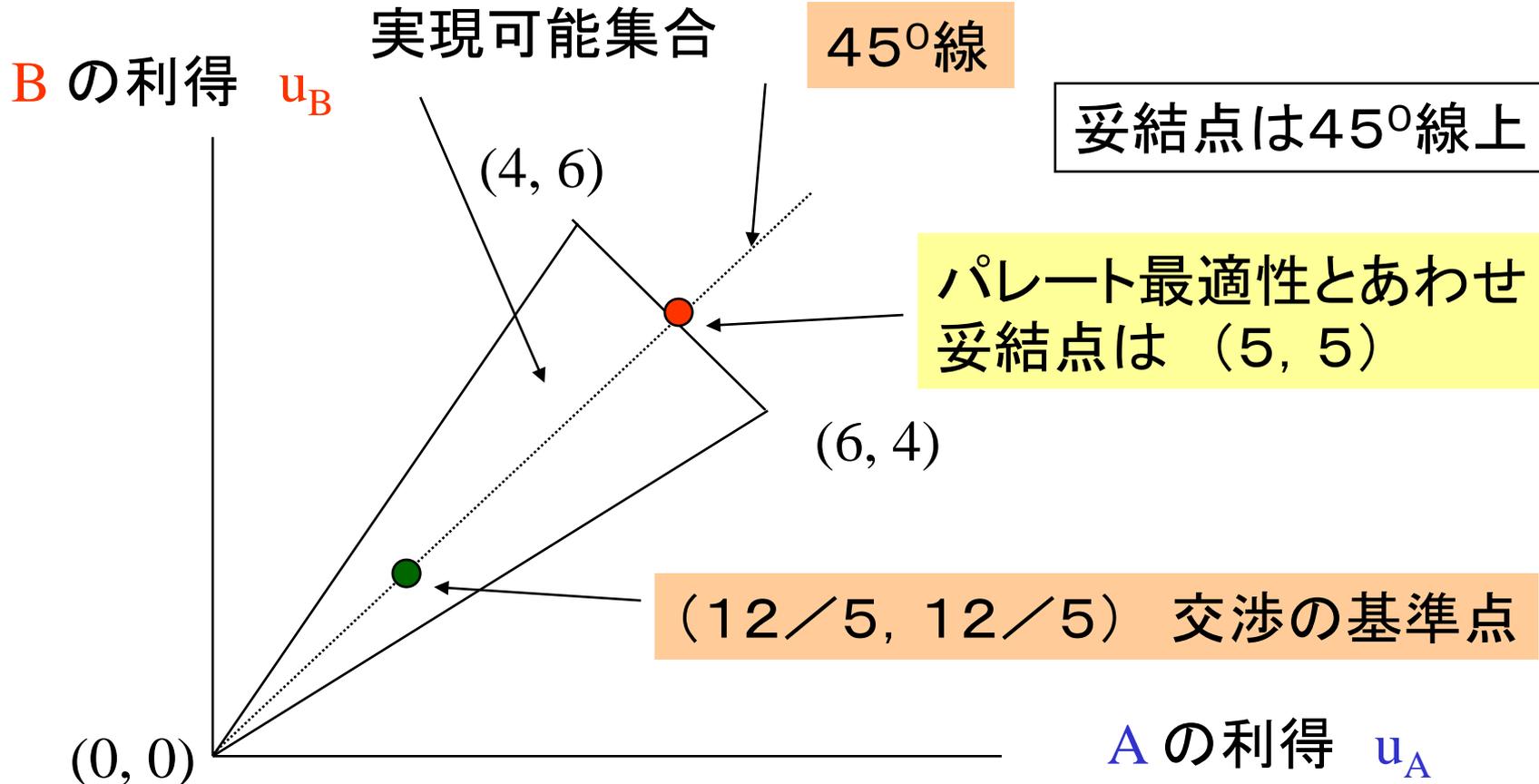
# パレート最適性

妥結点においては、一方のプレイヤーの利得をあげるともう一方のプレイヤーの利得は悪くなる



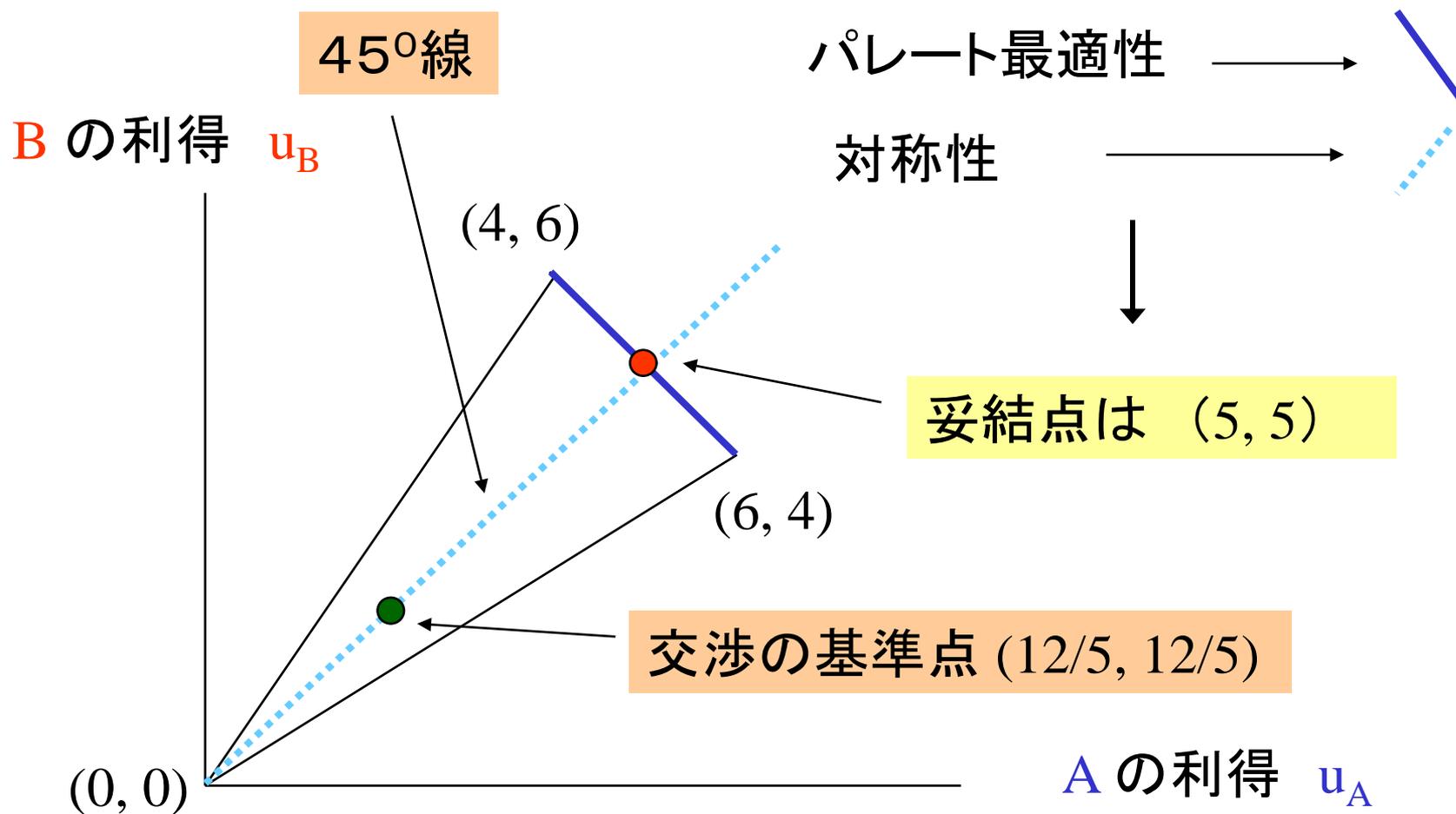
# 対称性

基準点における両者の利得が等しく、かつ、実現可能集合が45°線に対して対称であるとき、妥結点における両者の利得は等しい



# 事例5-1のナッシュ交渉解

事例5-1のナッシュ交渉解はパレート最適性と対称性から(5, 5)



## 利得の正アフィン変換からの独立性(1)

妥結点は、利得を測る原点や尺度には影響を受けない

	B	X	Y	
A				
X	6	4	0	0
Y	0	0	4	6

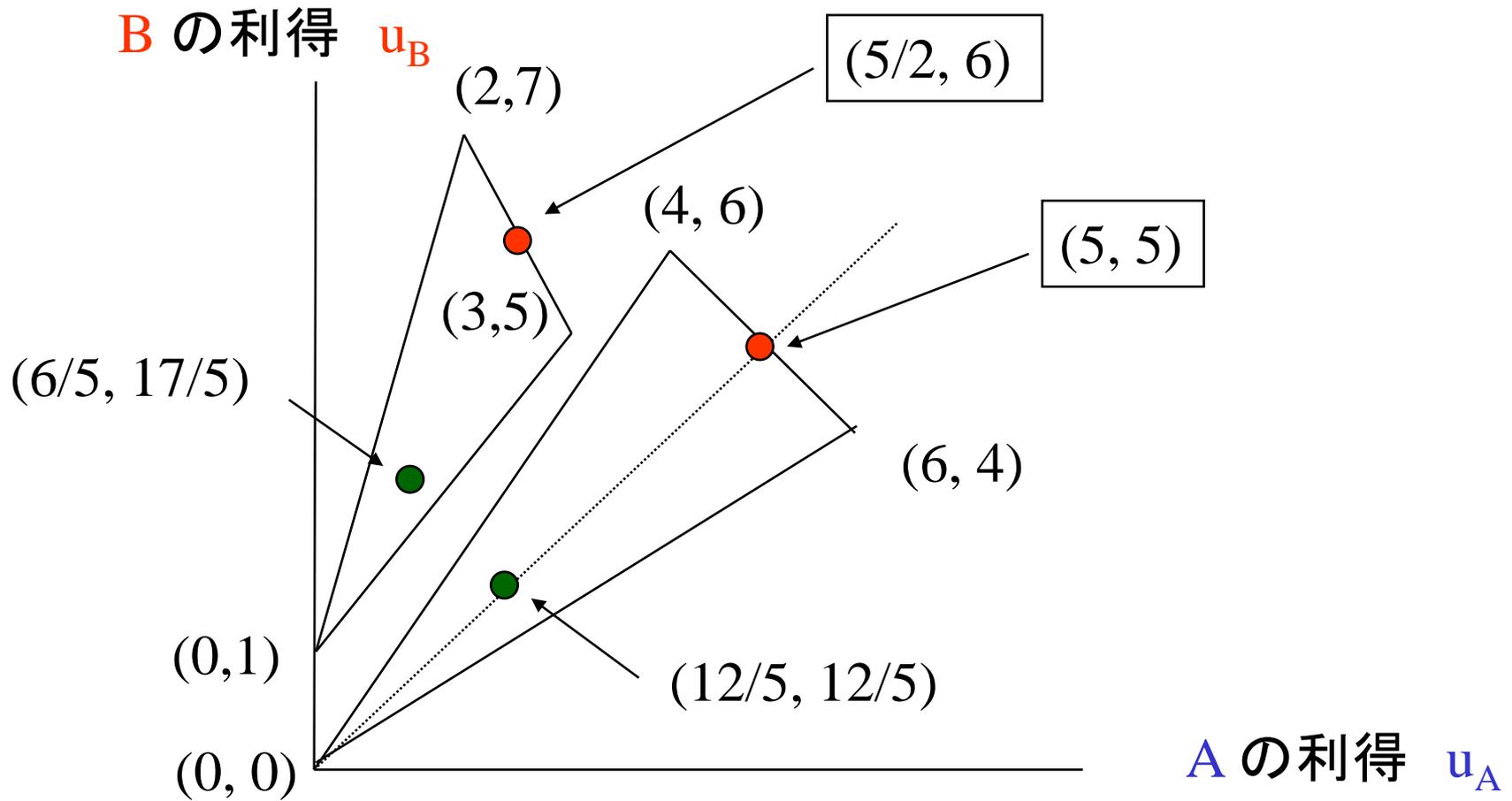


A はドル建て(1ドル=200円)  
B は見積もりが1億円増加

	B	X	Y	
A				
X	3	5	0	1
Y	0	1	2	7

単位 : A は100万ドル  
B は1億円

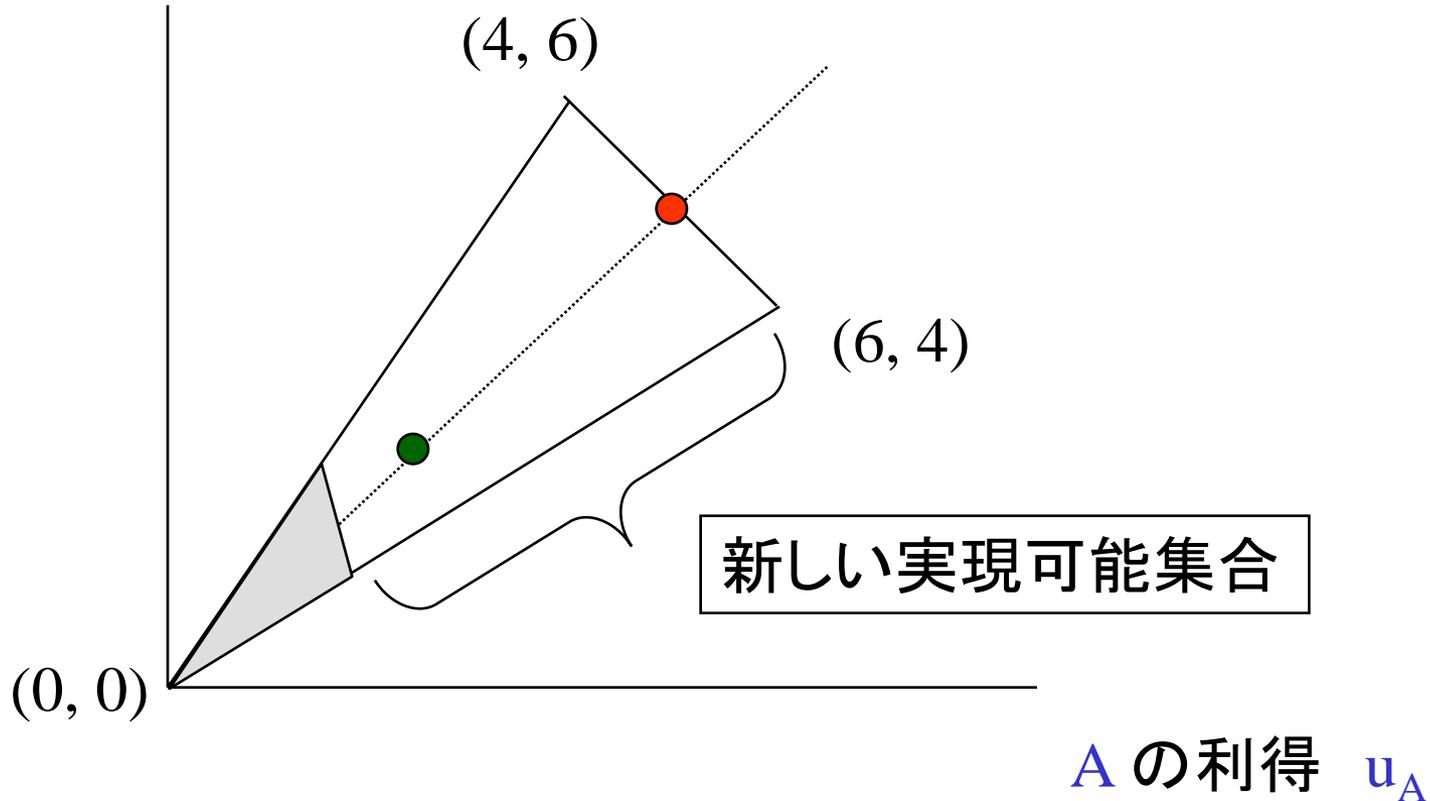
# 利得の正アフィン変換からの独立性(2)



# 無関係な結果からの独立性

基準点，妥結点以外の実現可能集合の結果が除かれていても，基準点が同じであれば妥結点も同じである

B の利得  $u_B$



## ナッシュ交渉解の求め方(事例5-1)

事例5-1 : パレート最適性と対称性から (5, 5)

一般的には: パレート最適な部分の式

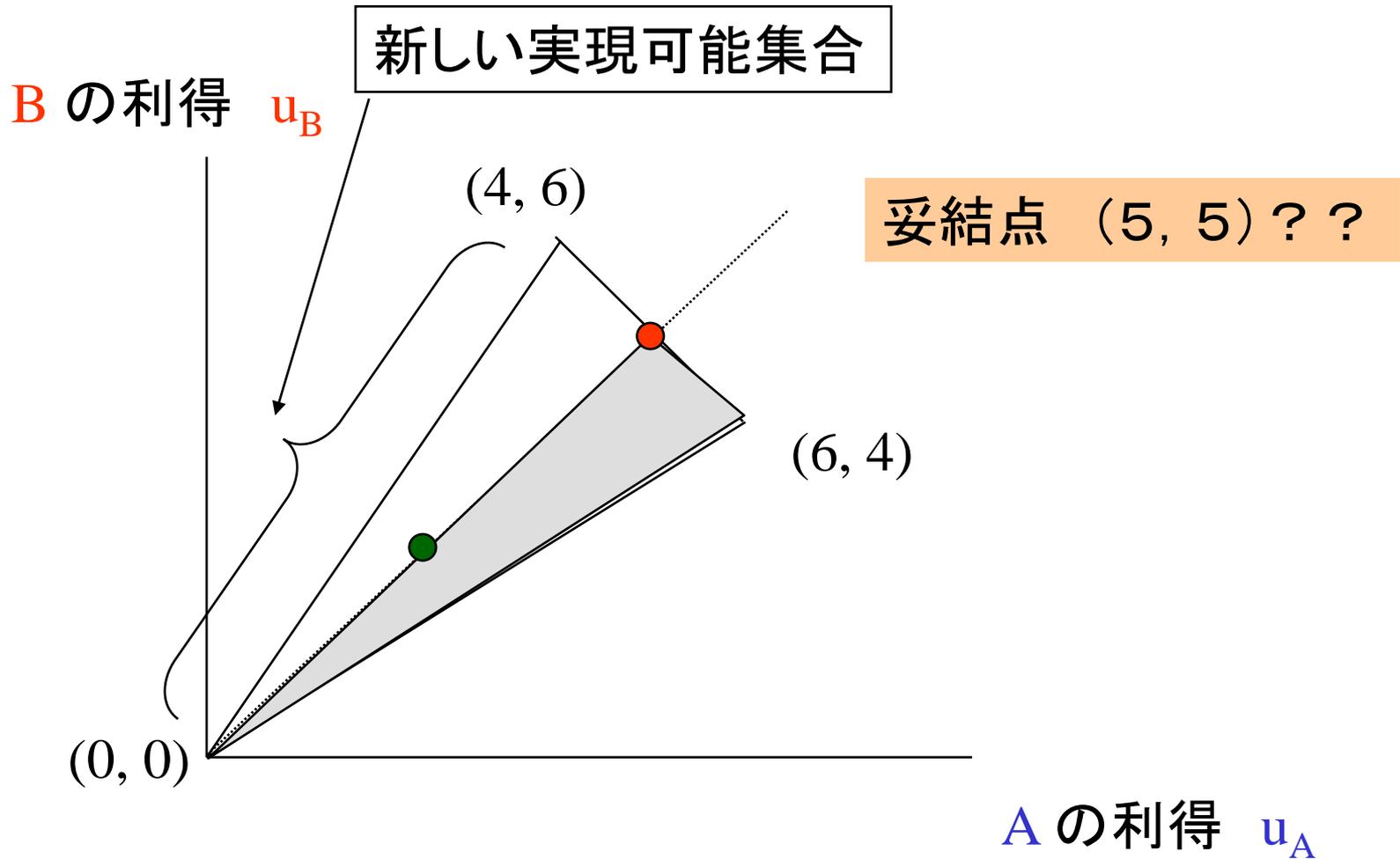
$$u_A + u_B = 10, \quad 4 \leq u_A, u_B \leq 6$$

$$\begin{aligned}(u_A - u_A^0)(u_B - u_B^0) &= (u_A - 12/5)(10 - u_A - 12/5) \\ &= -u_A^2 + 10u_A - 456/25 = -(u_A - 5)^2 + 169/25\end{aligned}$$

$u_A = u_B = 5$  で最大値  $\rightarrow$

ナッシュの交渉解は(5, 5)

# 無関係な結果からの独立性の問題点



# 非協力ゲームからのアプローチ

## ナッシュのアプローチ

A, B がそれぞれ自分の要求量  $x_A, x_B$  を同時にアナウンスする

$(x_A, x_B) \in R$  であれば, A は  $x_A$  を, B は  $x_B$  を得る。

そうでなければ, A は  $u_A^0$  を, B は  $u_B^0$  を得る



多数のナッシュ均衡

## ルービンシュタインのアプローチ

どちらかのプレイヤー(例えば, A)が両者の取り分  $(x_A, x_B)$  を提示

他方(B)がこれを受け入れれば, 終了, A は  $x_A$ , B は  $x_B$  を得る

拒否した場合には, 今度は B が両者の取り分  $(x_A, x_B)$  を提示

A が受け入れるか, 拒否するかを決定。

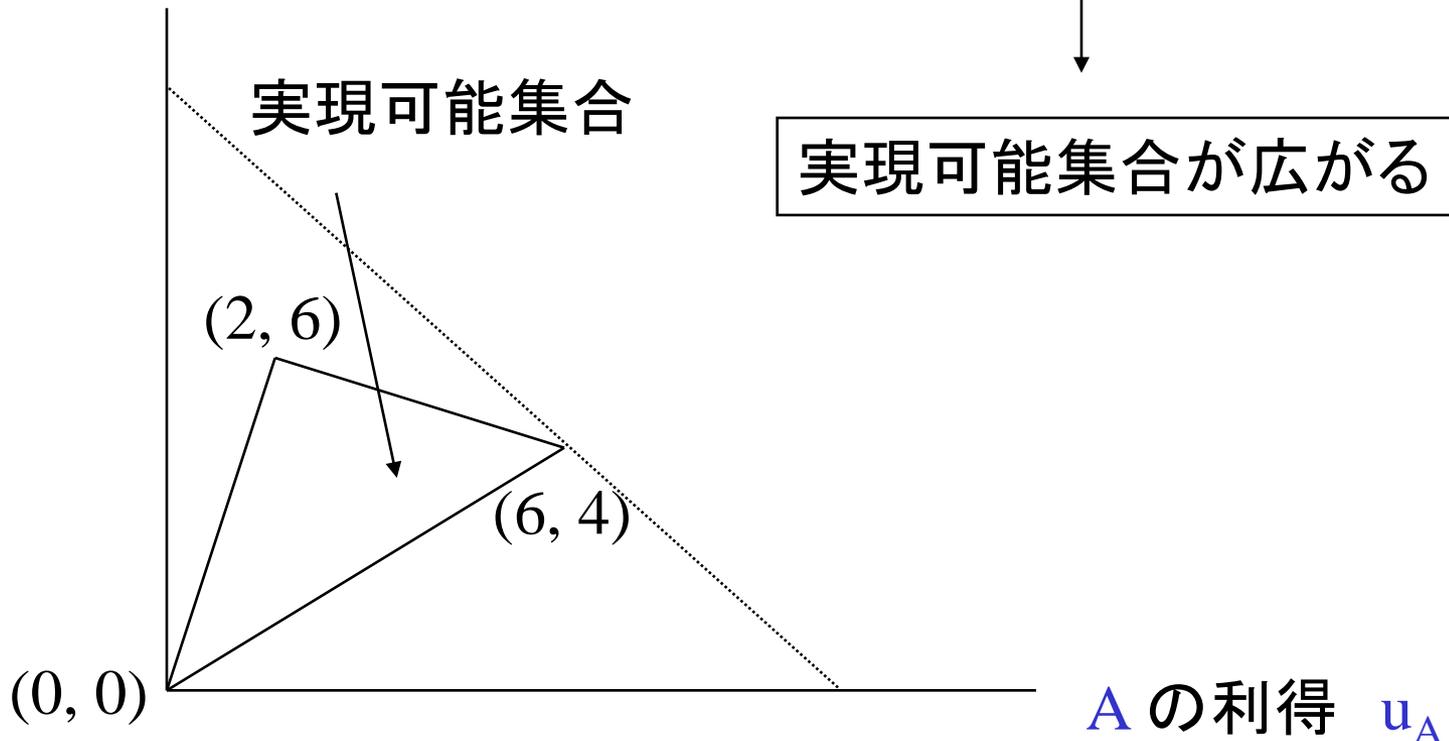
割引因子  $\rightarrow 1 \Rightarrow$  部分ゲーム完全均衡  $\rightarrow$  ナッシュ交渉解

# 譲渡可能効用とサイドペイメント

	B	X	Y	
A				
X	6	4	0	0
Y	0	0	2*	6

A, B ともに X をとって,  
利得 6, 4 を得て, 合計  
10 の利得を再配分する

B の利得  $u_B$



# TU ゲームと NTU ゲーム

金銭の値が増えればそれに比例して値が増すような効用

→ 譲渡可能効用(金銭を媒介として譲渡可能)

サイドペイメントが可能

TU ゲーム : 譲渡可能効用が存在し,  
サイドペイメントが可能なゲーム



NTU ゲーム

## 次回までの課題

Reading assignment

「ゲーム理論入門」139ページ～158ページ

配布資料: 2人協力ゲーム(交渉ゲーム)

練習問題 1 の 2

レポート(次回の授業時に提出)

練習問題 1 の 1 (a), (b), (c)

(A4のレポート用紙を用い,

左の上を1箇所ホッチキス止めのこと)