



数理計画法E(第6学期) 第13回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)

iida@gsic.titech.ac.jp

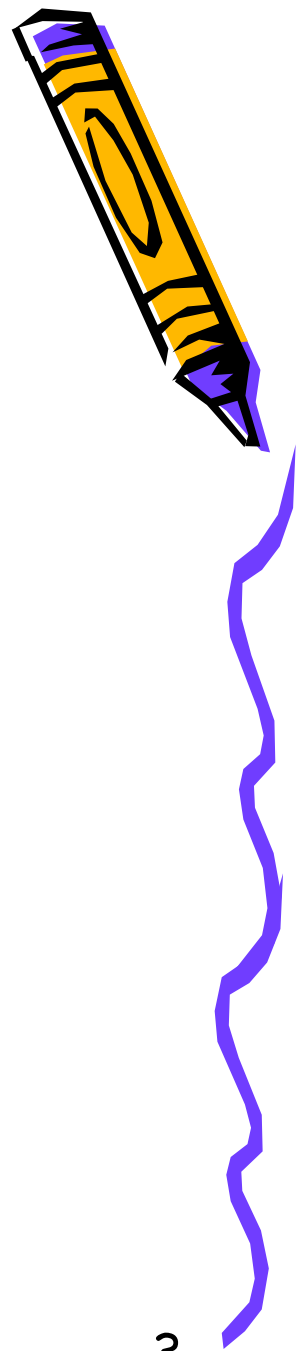
非線形計画問題(1)



- 線形計画問題
 - 実数ベクトル空間において、線形関数からなる制約条件の下、線形関数からなる目的関数を最大化、あるいは最小化する問題
- 組み合わせ最適問題
 - 有限個の中から解を選択する条件の下、線形関数からなる目的関数を最大化、あるいは最小化する問題
- 非線形計画問題
 - 実数ベクトル空間において目的関数を最大化、あるいは、最小化する問題



非線形計画問題(2)



- 一般の定式化

目的関数 : $f(x) \rightarrow \text{最小化}$

制約条件 : $x \in S$

- x : n 変数ベクトル $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$
- $f: R^n \rightarrow R$
- $S: R^n$ の部分空間

- 制約なし問題の定式化

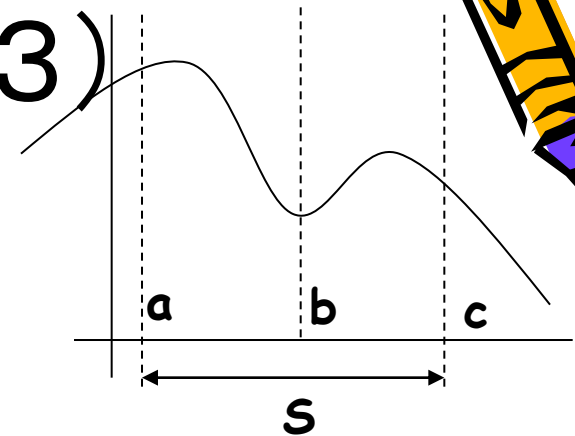
- $S = R^n$ である問題

目的関数 : $f(x) \rightarrow \text{最小化}$



非線形計画問題(3)

- 大域的最適解
 - その問題の真の最適解
- 局所的最適解
 - x の十分近くのどの実行可能解 $x+\delta x$ に対しても $f(x) < f(x+\delta x)$ であるような x
 - 局所最適解は一般に複数存在
 - 大域的最適解は局所的最適解の一つ



非線形計画問題(4)

- 凸関数

- 関数 f が下式を満たすとき、凸関数という

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha)f(y),$$

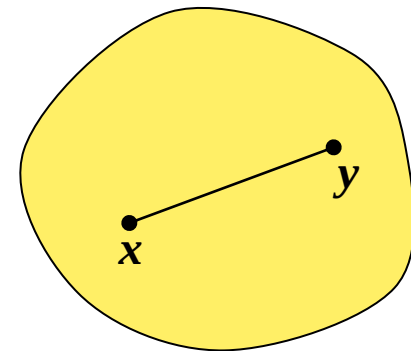
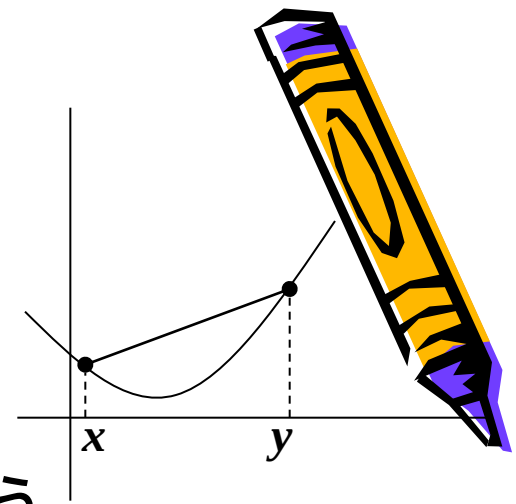
$$\forall x, y \in R^n, 0 \leq \alpha \leq 1$$

- 凸集合

- 集合 S が下式を満たすとき凸集合という

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in S$$

$$\forall x, y \in S, 0 \leq \alpha \leq 1$$



非線形計画問題(5)



- 凸計画問題
 - F が凸関数、 S が凸集合である非線形計画問題
- 定理5.1
 - 凸計画問題には、局所的最適解がひとつしかなく、それが大域的最適解となる
- 凸計画問題
 - 局所最適解をもとめればよい
- 一般の非線形計画問題
 - 局所最適解が求まっても、大域的最適解とは限らない



非線形計画問題(6)



- 関数の勾配

- 点 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ における関数 $f(\mathbf{x})$ の勾配を次のベクトル $\nabla f(\mathbf{x})$ で表す

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^T$$

- これは点 $\mathbf{x}$ の近傍において、 f がもっとも増加する方向とその増加量を示す
- $f(\mathbf{x})$ の値が等しい $\mathbf{x}$ からなる線(面)を等高線(面)といい、勾配は等高線(面)と垂直になる



非線形計画問題(7)



- ヘッセ行列
 - $\nabla f(\mathbf{x})$ をさらに微分した下記の行列

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{(\partial x_2)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{(\partial x_n)^2} \end{pmatrix}$$



2012/11 ヘッセ行列は_____であり、点 $\mathbf{x}$ 付近の f の勾配状況を示す

非線形計画問題(8)



- 半正定値
 - 任意のベクトル x に対して $x^T A x \geq 0$ となる行列 A
 - A のすべての固有値が非負であることと等価
- 正定値
 - 任意のベクトル $x \neq 0$ に対して $x^T A x > 0$ となる行列 A
 - A のすべての固有値が正であることと等価



非線形計画問題(9)



- 制約なし問題の最適性条件

- 1次の必要条件

- x^* が局所最適解であるためには、

$$\nabla f(x^*) = 0$$

でなければならない

(5. 1)

- 2次の必要条件

- x^* が局所最適解であるためには、式(5.1) かつ

$$\nabla^2 f(x^*) \text{が半正定値}$$

でなければならない

(5. 2)

- 2次の十分条件

- 式(5.1)かつ

$$\nabla^2 f(x^*) \text{が正定値}$$

ならば、 x^* は局所最適解である

(5. 3)



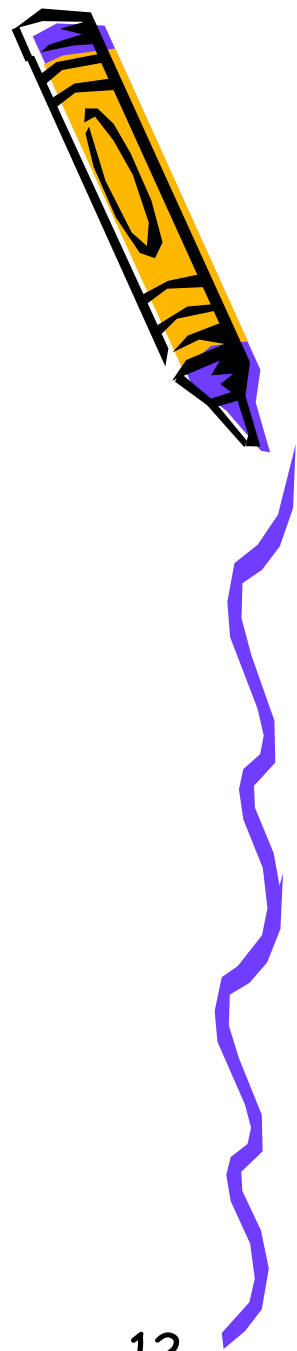
非線形計画問題(10)



- 式(5.1)
 - 必要条件であるが十分条件ではないので、これを満たしても x^* が局所最適解であるとは限らない
 - たとえば、鞍点、最大値などの**停留点**
- 式(5.3)
 - 十分条件であって必要条件ではないので、局所的最適解であってもこの式をみたさないものがある



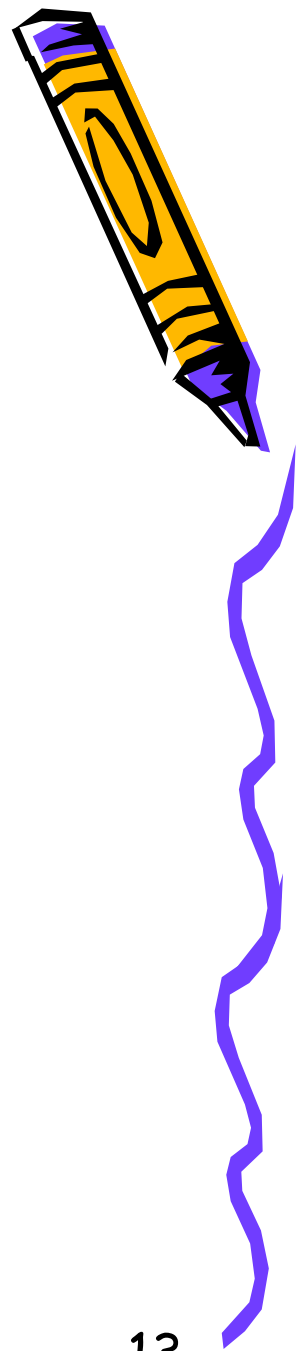
非線形計画問題(11)



- 問題の分類
 - 制約なし問題・・・比較的やさしい
 - 制約つき問題・・・困難
 - 凸問題・・・・・・・・比較的易しい
 - 一般の問題・・・・困難



非線形計画問題(12)



- 解法の分類
 - 制約なし問題
 - 最急降下法、ニュートン法、準ニュートン法
 - 制約つき問題
 - ペナルティ法、逐次二次計画法

