



数理計画法E(第6学期) 第9回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)

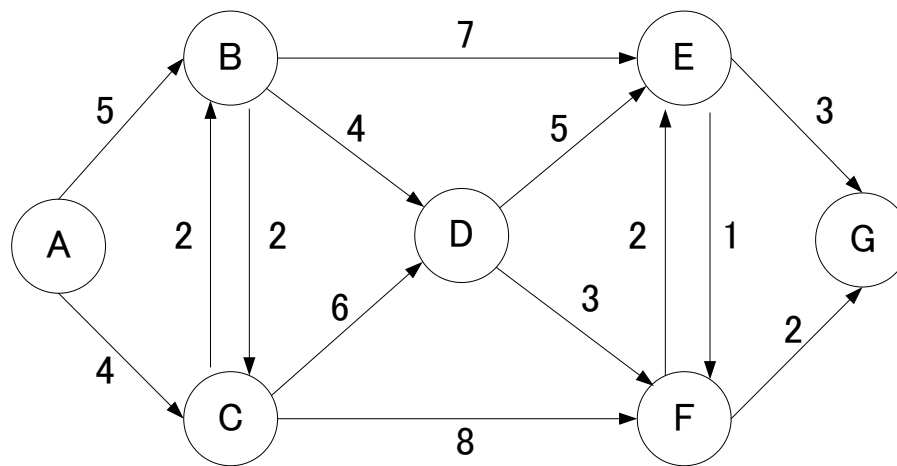
iida@gsic.titech.ac.jp



前回までの復習1



- 最短路問題
 - 節点Aから節点G間で最短で行くための経路を求めよ。ただし、枝に与えられた値はその枝の長さを表す。

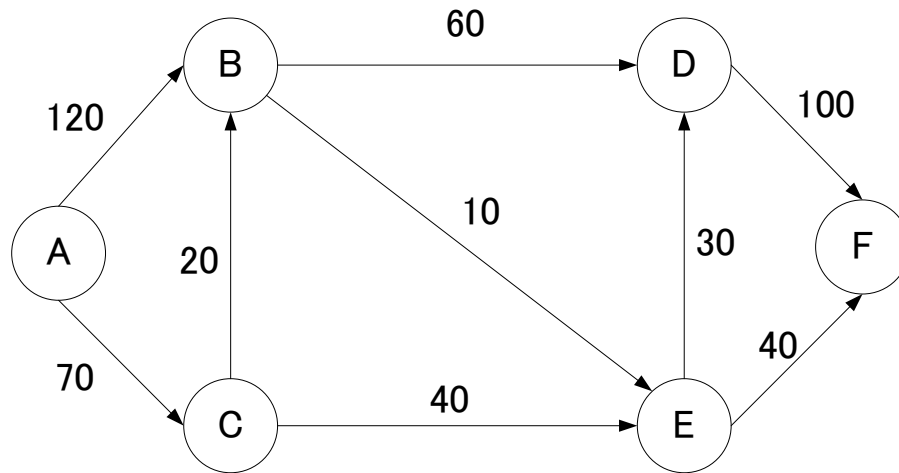


前回までの復習2



- 最大流問題

- 節点Aから節点Fまで最大どれだけの流量を流すことが出来るか。ただし、枝に与えられた値はその枝の容量を示す。

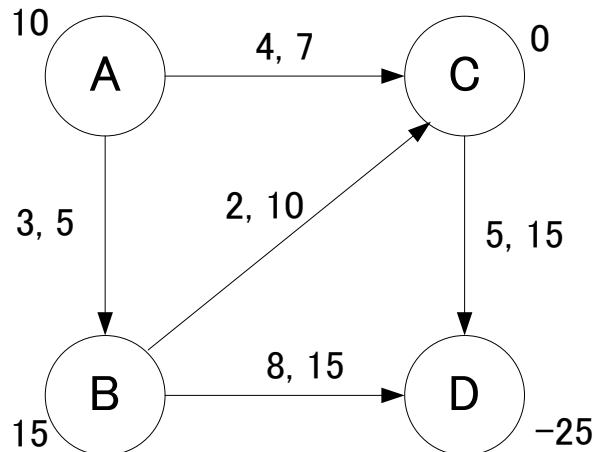


前回までの復習3

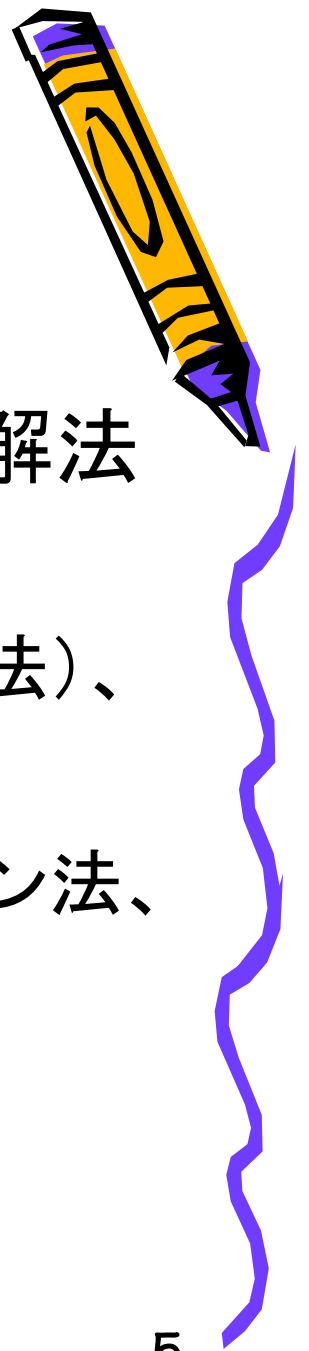


- 最小費用流問題

- 全ての節点における需要量・供給量を満足しつつコストを最小にするにはどうしたらよいか。



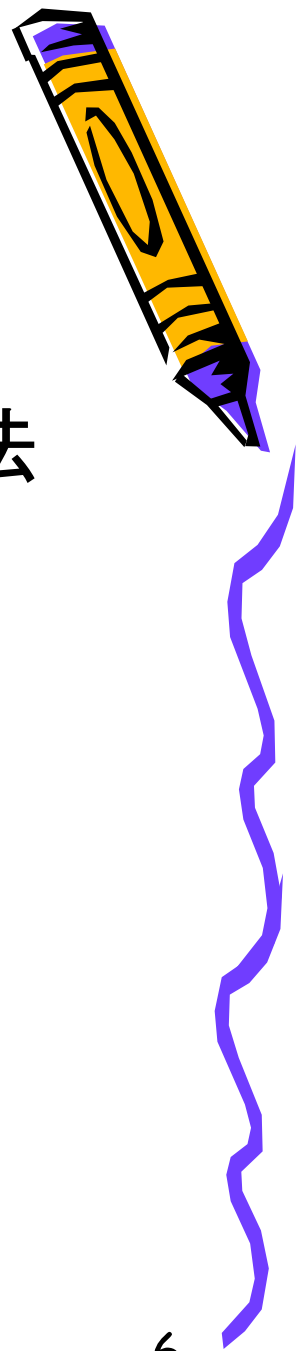
前回までの復習4



- 代表的ネットワーク最適化問題とその解法
 - 最短路問題・・・ダイクストラ法
 - 最大流問題・・・フロー増加法(ラベリング法)、プリフロープッシュ法
 - 最小費用流問題・・・バサッカー・ゴーウェン法、クライン法



PERT (Program Evaluation and Review Technique)・1



- ・ 米海軍が開発したプロジェクト管理手法
 - 作業の相互関係をネットワーク図で表現
 - 作業開始順序の最適化等を利用

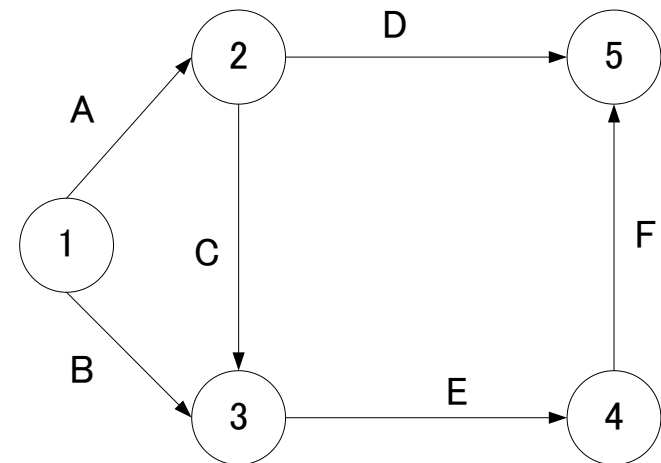


PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 2



- ・ [問題 3.3] 作業AからFまでの6つからなる表のプロジェクトの終了までの最短日数を求めよ。

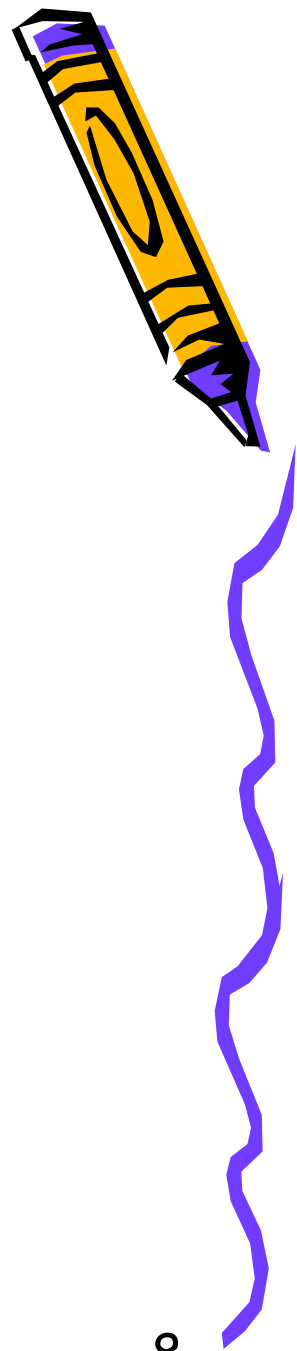
作業名	制約	所要日数
A	なし	2
B	なし	6
C	A	3
D	A	8
E	B, C	3
F	E	4



アローダイアグラム

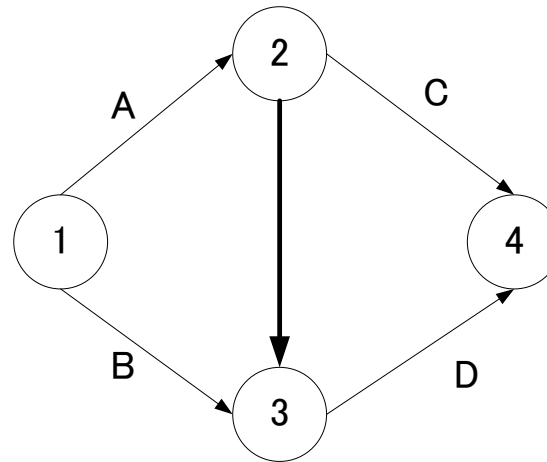


PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 3

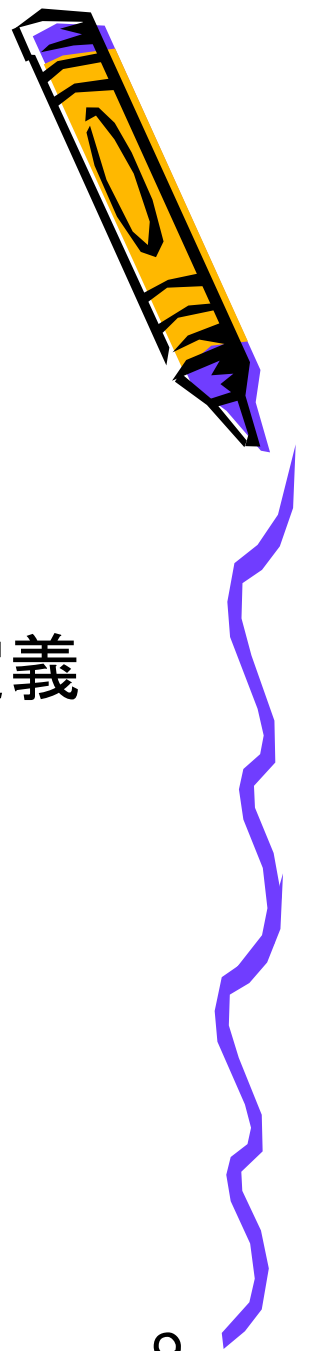


- ・ アローダイアグラムがかけない場合
- _____を追加

作業名	制約
A	なし
B	なし
C	A
D	A,B



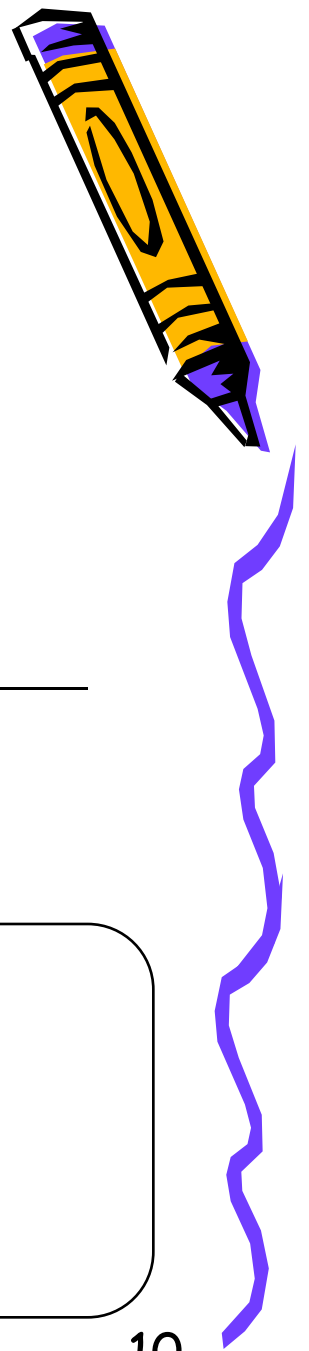
PERT (Program Evaluation and Review Technique) ・ 4



- ・ アローダイアグラムのモデル化
 - 節点の集合の定義 $V = \{1, 2, \dots, m\}$
 - 枝集合 E に対して、 $(i, j) \in E$ ならば $i < j$ と定義
- よって必ず下記が成立
 - ・ 始点 = _____
 - ・ 終点 = _____



PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 5



- プロジェクト所要時間の導出

- アローダイアグラム上において

- ・ 始点から終点までの全パスにおける_____
- ・ 前提: ダミー枝の長さ=0
- ・ 枝(i,j)の長さ= $t_{i,j}$

プロジェクト所要時間の求め方

枝の集合をE、節点の集合を $V=\{1,\dots,m\}$ としたとき、
 $j=2,\dots,m$ について以下を順に求める。

$$v_j^e = \max_{(i,j) \in E} (v_i^e + t_{i,j})$$

ただし、 $v_1^e = 0$.

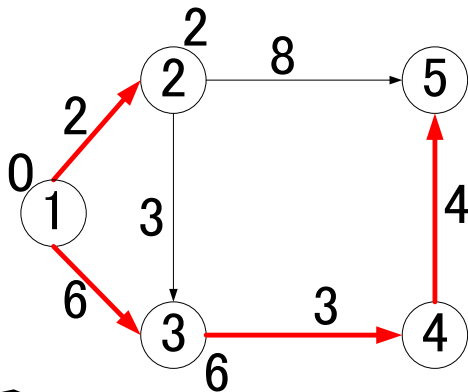


PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 6



- v_i^e
 - 枝(i,j)に対応する作業 $A_{i,j}$ が開始できる最も早い時刻 = (_____)

- 問題3.3を解く



(0) $v_1^e = 0.$

(1) $v_2^e = v_1^e + t_{1,2} = 2.$

(2) $v_3^e = \max(v_1^e + t_{1,3}, v_2^e + t_{2,3}) = 6.$

(3) $v_4^e = \underline{\hspace{4cm}}$

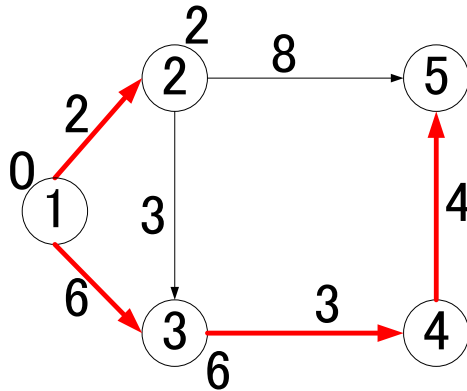
(4) $v_5^e = \underline{\hspace{4cm}}$



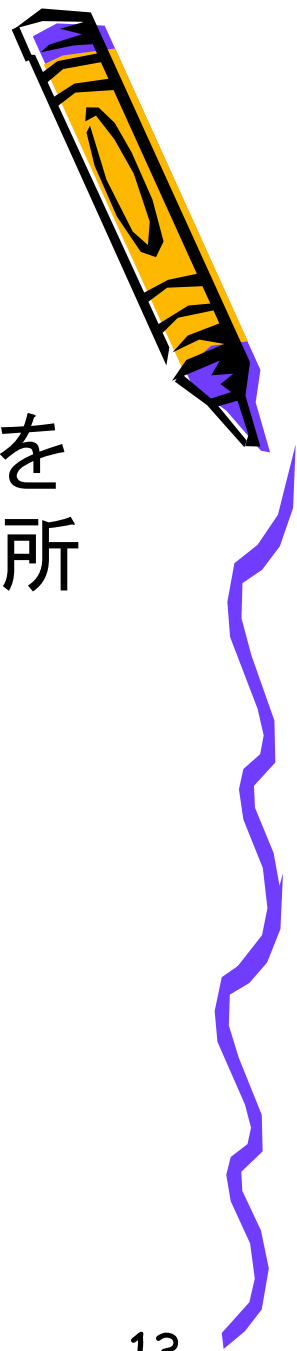
PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 7



- 図では、 v_j^e を求める際に最大値を取った枝を赤く描いている。
- 始点から終点の最長経路 = $(1,3),(3,4),(4,5) =$ _____



課題1



- 表のプロジェクトのアローダイヤグラムを作成し、最早開始時刻とプロジェクトの所要日数を求めよ。

作業名	制約	所要日数
A	なし	4
B	なし	6
C	A	4
D	A, B	3
E	A	5
F	C, D	2



PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 8

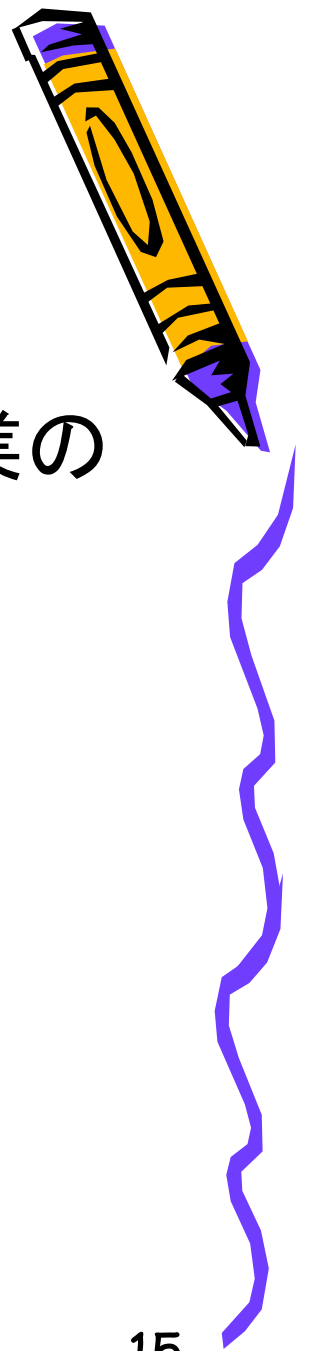


- PERT手法

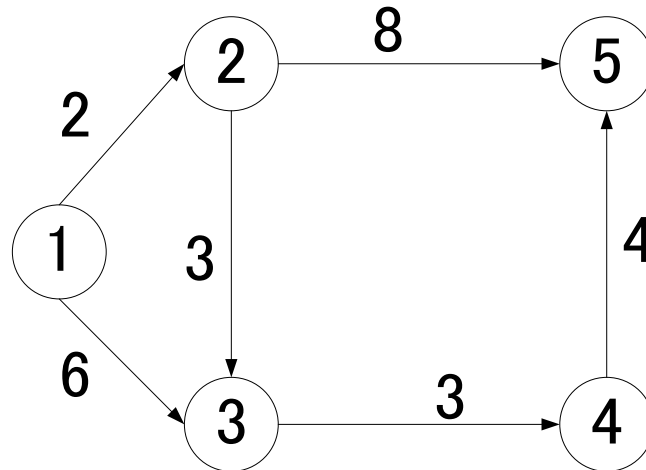
- アローダイアグラムにより複数の作業から構成されるプロジェクトの所要日数の導出
- その次に、各作業の延長できる最大時間 () の導出も可能



PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 9



- [問題3.4] 下図のプロジェクトの各作業の余裕時間を求めよ。



PERT (Program Evaluation and Review Technique)・10



- ・ 余裕時間

- プロジェクトの所要時間を変えずに、いずれかの作業を延長可能な最大時間
- 余裕時間 = () - 最早開始時刻
- クリティカルパスの余裕時間 = 0 - その作業の作業時間

() の求め方

枝の集合をE、節点の集合を $V=\{1, \dots, m\}$ としたとき、 $j=m-1, m-2, \dots, 1$ について以下を順に求める。

$$v_i^l = \min_{(i,j) \in E} (v_j^l - t_{i,j})$$

ただし、 $v_m^l = v_m^e$.



PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 11



- 問題3.4の解

① 最早開始時刻を導出

$$\begin{cases} v_1^e = 0, v_2^e = 2, v_3^e = 6, \\ v_4^e = 9, v_5^e = 13. \end{cases}$$

② $v_5^l = v_5^e = 13.$

③ $v_4^l = v_5^l - t_{4,5} = 13 - 4 = 9.$

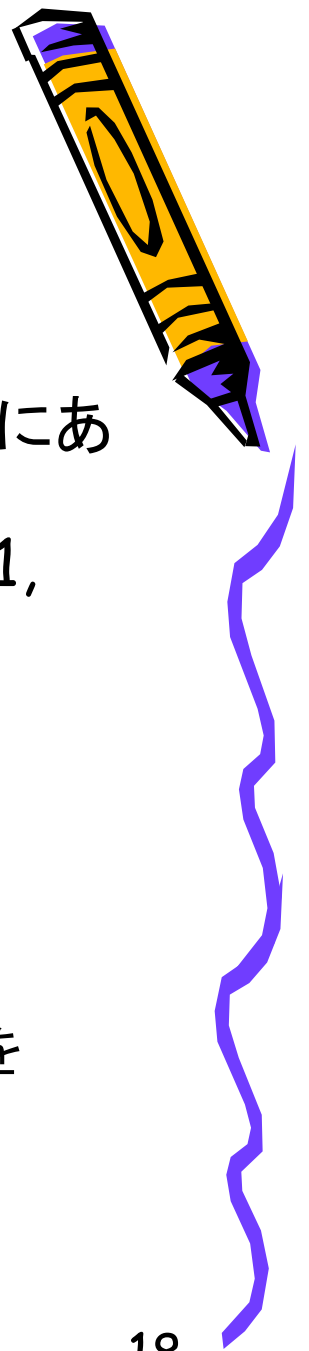
④ $v_3^l = v_4^l - t_{3,4} = 9 - 3 = 6.$

⑤ $v_2^l = \min(\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$

⑥ $v_1^l = \min(\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$



PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 12



- ⑦ 作業 (1,3), (3,4), (4,5) はクリティカルパス上にあるので、余裕時間は0. それ以外の作業(1,2), (2,3), (2,5) の余裕時間はそれぞれ、 $3-0-2=1$, $6-2-3=1$, $13-2-8=3$ となる

- 余裕時間

- 全余裕時間 $v_j^l - v_i^e - t_{i,j}$.
 - 高々一つの作業しか遅延しない前提の余裕時間
- 自由余裕時間 $v_j^e - v_i^e - t_{i,j}$.
 - その作業の後方の他の作業も独立に遅延することを前提とした余裕時間



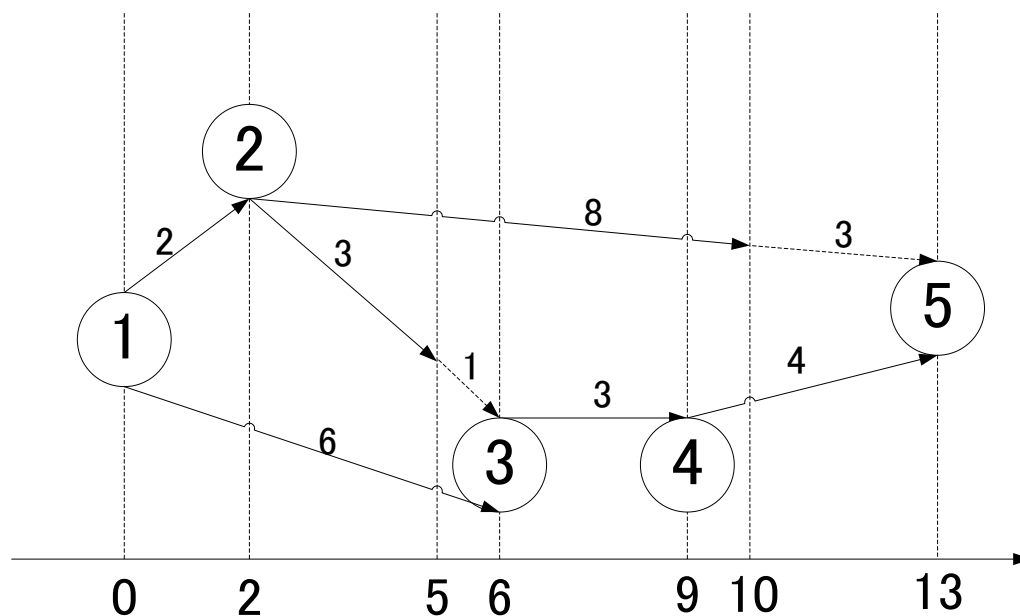


- 最早開始時刻
 - 最も早くにそれ以降の作業を開始可能な時刻
 - (作業が予想より早くならないことが前提)
- 最遅終了時刻
 - それ以前の作業の終了時刻のなかで最も遅くしても良い時刻

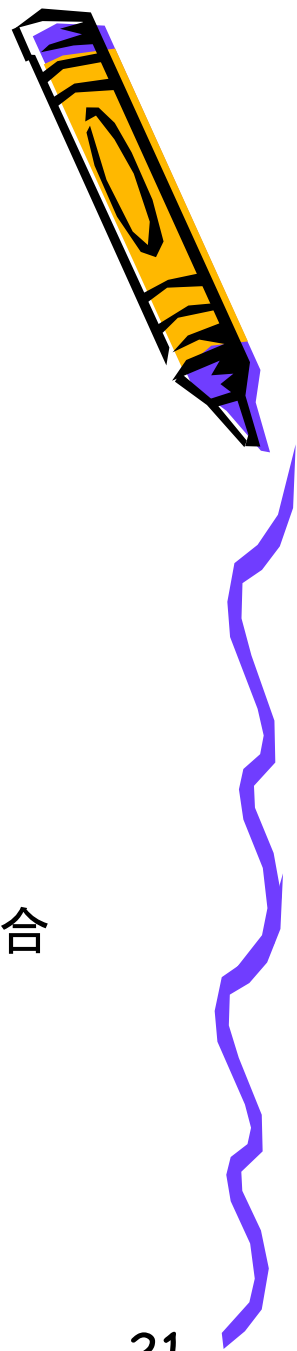


今までの例

(全余裕 = 自由余裕 or 自由余裕なし)



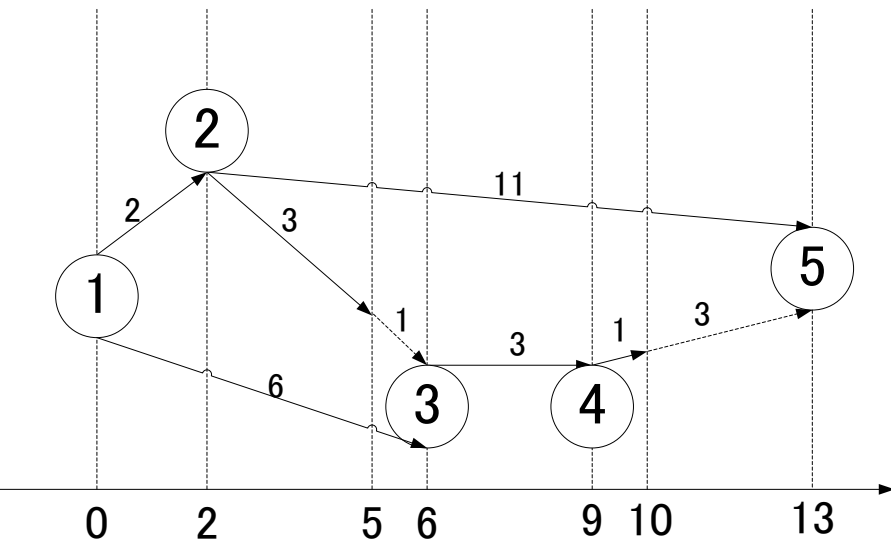
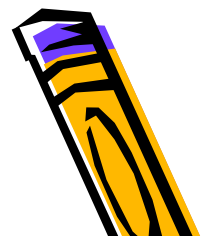
全余裕時間、自由余裕時間の分類



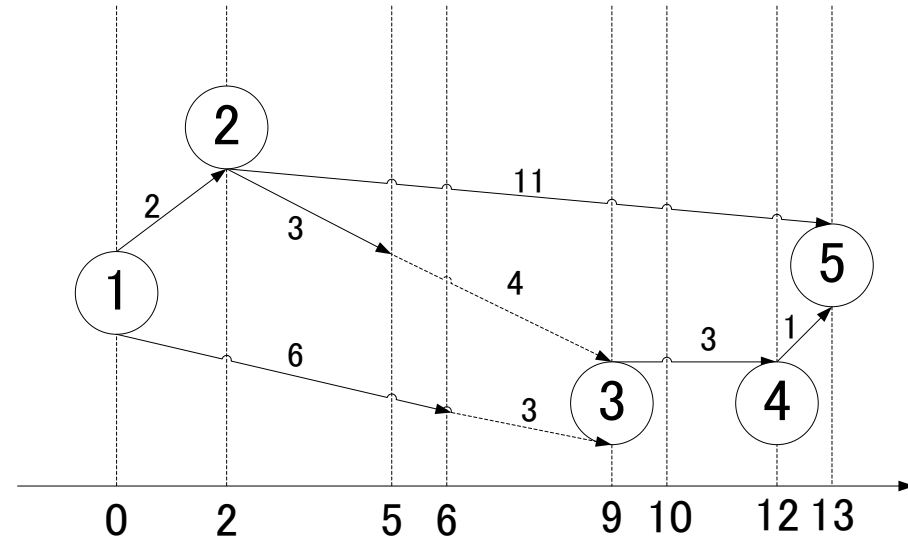
- 全余裕時間＝自由余裕時間＝0
 - クリティカルパス
- 全余裕時間＝自由余裕時間
 - 終点の直前の作業で、全余裕時間が0以外の場合
 - 後方に作業がないので、自由余裕時間が小さくならない
- 全余裕時間 $\neq$ 0、自由余裕時間＝0
 - 後方に作業があり、自由余裕時間を食いつぶしてしまう場合
- 全余裕時間 $\neq$ 自由余裕時間、かつ自由余裕時間 $\neq$ 0
 - 後方の作業と余裕時間を完全に共有していない場合



自由余裕≠全余裕の例 (作業(1,3)(2,3)に着目)



自由余裕



全余裕



課題2

- 下図の全余裕時間と自由余裕時間を求めよ。

