数理計画法E(第6学期)
第8回

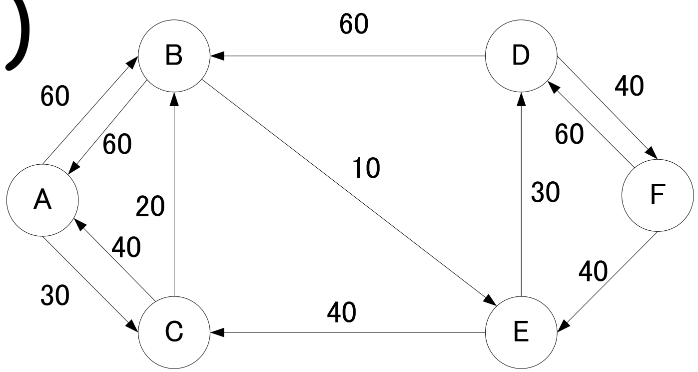
担当:飯田勝吉(いいだかつよし)
iida@gsic.titech.ac.jp

11/22第7回課題

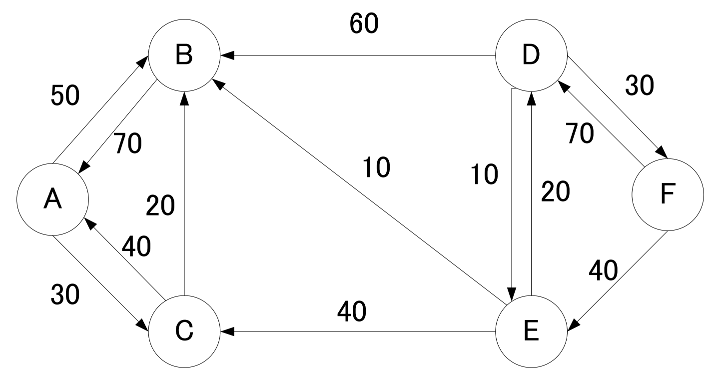
- (1)本稿9,10ページの例に対して、図(d)のフローに対する残余ネットワークを図示せよ。
- (2)(1)の残余ネットワークに対してさらなるフロー増加路を見つけ、さらに流量の増加したフローを図示せよ。
- (3)　12ページの(2)においてラベリング法を用いて増加路を求めよ。
- (4)　(3)終了後の残余ネットワークを図示し、ラベリング法を用いて増加路を求めよ。さらに流量を増やすことは可能か

11/22第7回課題回答

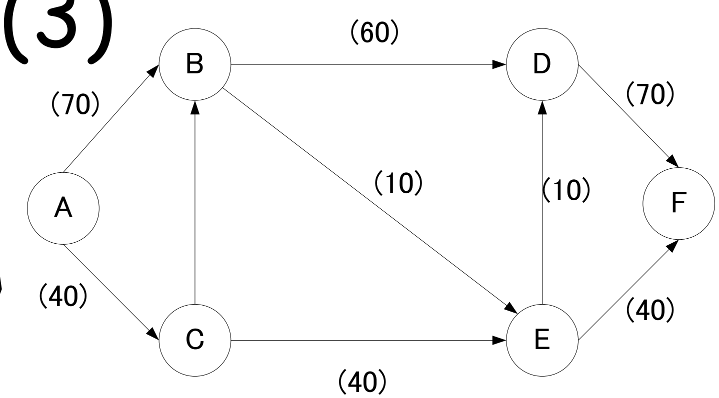
- (1)



- (4)



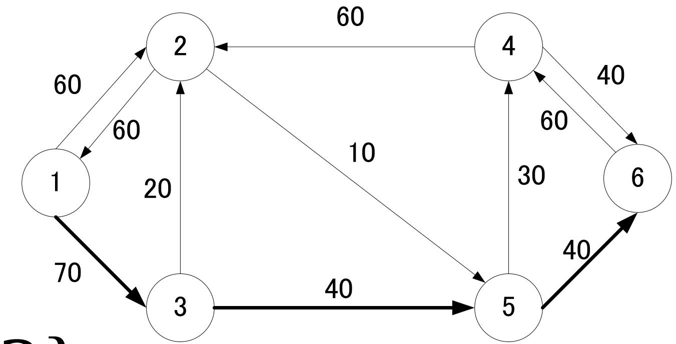
- (2),(3)



第7回、8頁：フロー増加法（1）

- あるフロー $x=\{x_{ij}\}$ が得られていると仮定
  - （本稿では、以下簡単のため枝(i,j)と枝(j,i)が同時に存在することがないと仮定）
- 残余ネットワーク
  - 元のネットワークG=(V,E)の各枝(i,j)∈Eを容量 $u_{ij}^{x} = u_{ij} - x_{ij}$ を持つ枝(j,i)に置き換え、xijの容量を持つ逆向きの枝________を設けたネットワーク。
  - ただし、$u_{ij}^{x} = 0$ の場合は枝(i,j)を除外する
  - u_{ij}^{x} の値を____________________と呼ぶ。

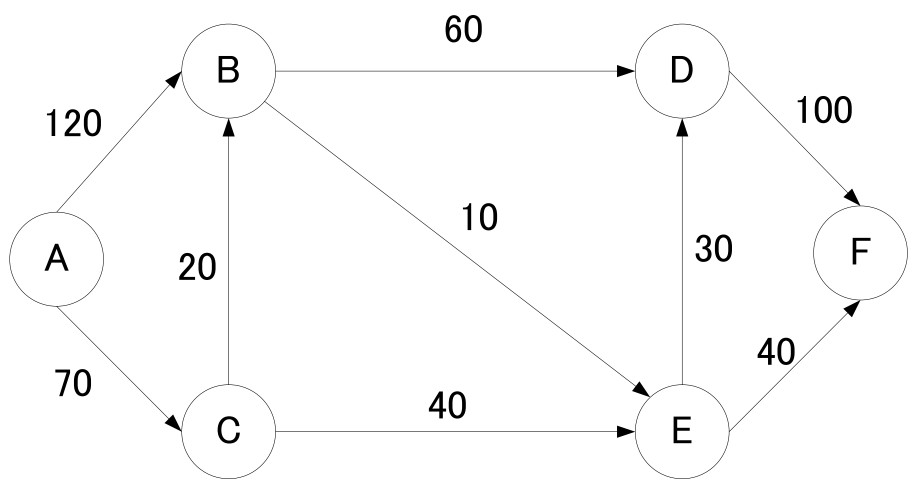
第7回17頁：
ラベリング法(5)



- (3) $\hat{i}=3$ を選択、S={1,2,3}。
  __________∈Eだが、_____はすでにLに含まれているので更新しない
- (4) $\hat{i}=5$ を選択、S={__________}
  __________∈Eより、L={__________},
  __________。

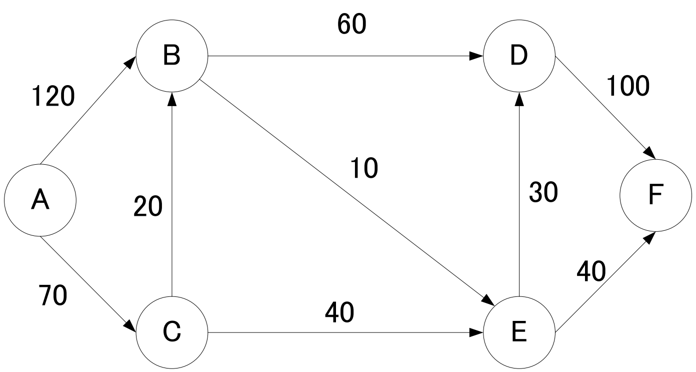
前回復習(1)

- 最大流問題
  - 節点Aから節点Fまで最大どれだけの流量を流すことが出来るか。ただし、枝に与えられた値はその枝の容量を示す。

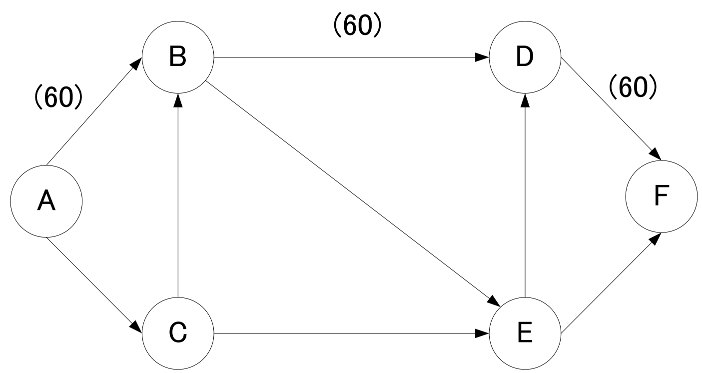


前回復習(2)

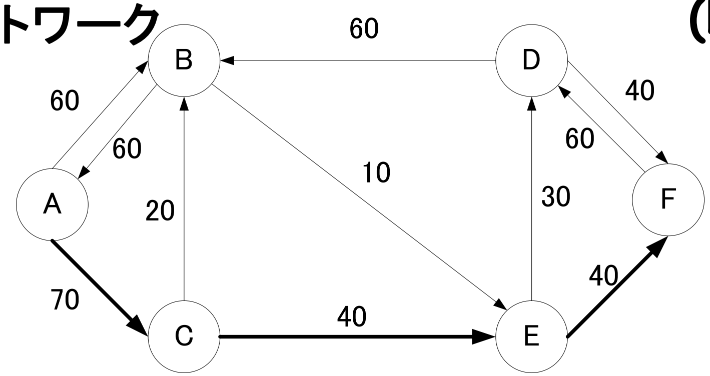
- フロー増加路
  - フローに経路を追加→残余ネットワークの計算→・・



(a)もとのネットワーク



(b)フロー



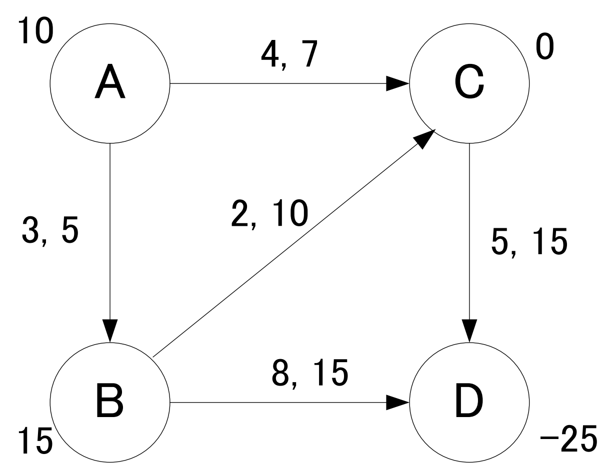
(c)残余ネットワーク

最大流問題の2つ目の解法

- フロー増加法
  - 計算過程でも流れ保存則を満足
  - $\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} = 0 \qquad (i \in V - \{s,t\})$
- プリフロープッシュ法
  - 計算過程では、流入超過を許容、流出超過のみを満たすこととする
  - $\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} \le 0 \qquad (i \in V - \{s,t\})$
  - プリフロー＝フロー生成過程のもの
  - 理論的計算量、実際の計算時間双方において、フロー増加法よりも優秀

今回の講義：最小費用流問題（1）

- 全ての節点における需要量・供給量を満足しつつコストを最小にするにはどうしたらよいか。（枝の値＝（コスト、容量）、節点に与えられた値＝供給量（正）、需要量（負））



最小費用流問題(2)

- 線形計画問題としての定式化
  - 輸送コストを$c_{i,j}$、容量を$u_{i,j}$とし、節点$i \in V$の需要・供給量をb_iとする。
    - $b_i>0$ならば供給(=始点)で、$b_i<0$ならば需要(=終点)で、それぞれの量が$|b_i|$
    - $b_i=0$の節点=通過節点

目的関数： $\sum_{(i,j)\in E} c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow$ 最小化

制約条件： $\sum_{(v,j)\in E} x_{v,j} - \sum_{(i,v)\in E} x_{i,v} = b_v \quad (\forall v \in V)$

最小費用流問題(3)

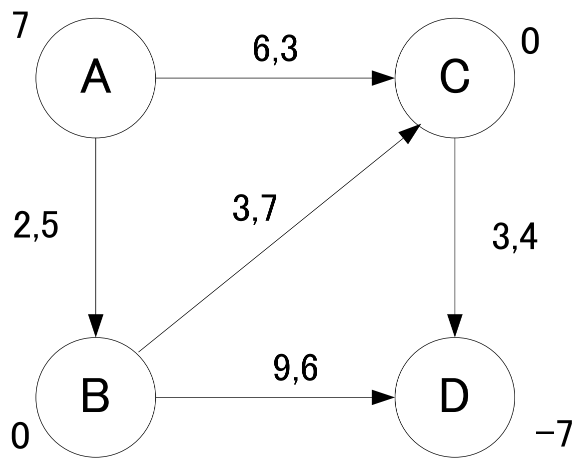
- 二つの解法
  - バサッカー･ゴーウェン法
    - 費用が最小である経路にできるだけ多く流す
  - クライン法(負閉路除去法)
    - 全ての制約条件を満たす初期フローを与え、その残余ネットワークを計算
    - 残余ネットワーク中の負閉路を発見
    - 負閉路に沿ってフローを増加
    - を繰り返す
- (前提:始点と終点が1ペアのみ存在)

バサッカー・ゴーウェン法（1）

- (Step 1) 始点から終点までの最短路を探索。求まった経路が最小費用コストであるので、そこに出来るだけ流す。（流せる最大流＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）
- (Step 2) 得られたフローに対して残余ネットワークを構成。逆向き枝を生成する際、そのコストは元の枝の負の値とする。
- (Step 3) 残余ネットワークにおいて、最短の増加路を探索。
- (Step 4) Step 2 のフローに経路容量分の最短の増加路を増加、流量が制約条件を満たせば終了。そうでなければ Step 2 に戻る。

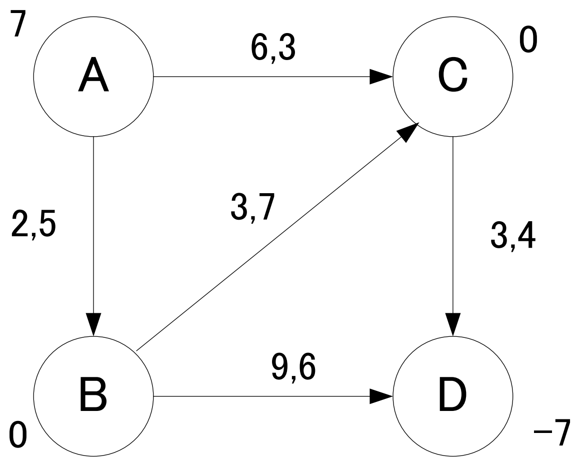
バサッカー・ゴーウェン法（2）

- 下図の例で説明

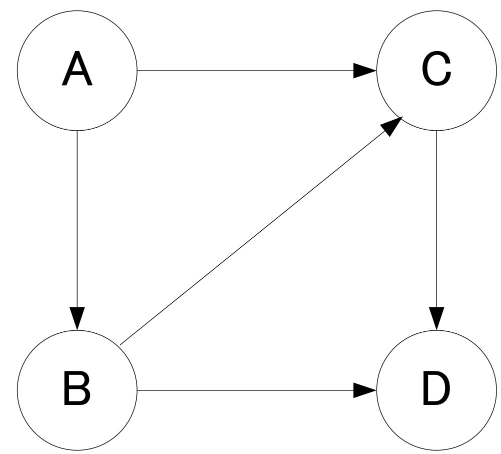


バサッカー・ゴーウェン法（3）

- （1）AからDへの最短経路（A→______）は経路長が____。これはこの経路で1単位流すとコストが____がかかることを意味する。この経路の経路容量は____。



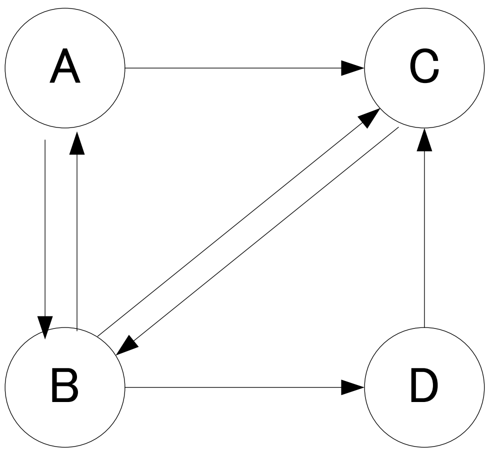
現在計算中のネットワーク



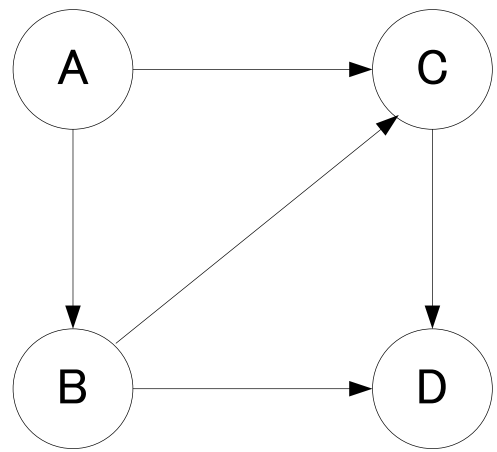
現在計算中のフロー

バサッカー・ゴーウェン法(4)

- (2)需要・供給量を満たしていないので、残余ネットワークを構成し、最短路を計算(A→________)は経路長が_____。この経路の経路容量は_____。



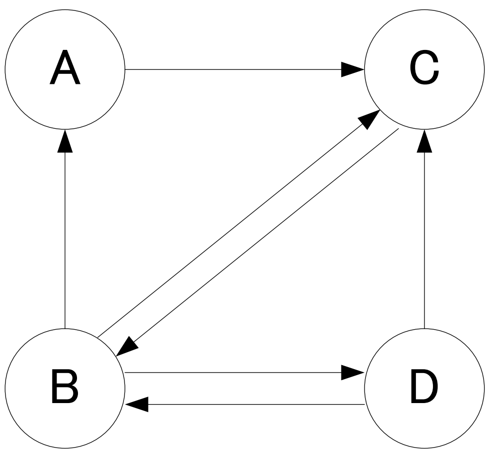
現在計算中のネットワーク



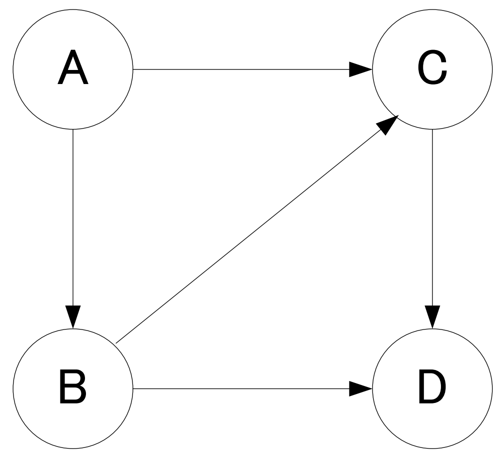
現在計算中のフロー

バサッカー・ゴーウェン法(5)

- (3)需要・供給量を満たしていないので、残余ネットワークを構成し、最短路を計算(A→_______)は経路長が_____。この経路の経路容量は_____。(2で十分→2流す)



現在計算中のネットワーク



最終的に求まったフロー

クライン法（1）

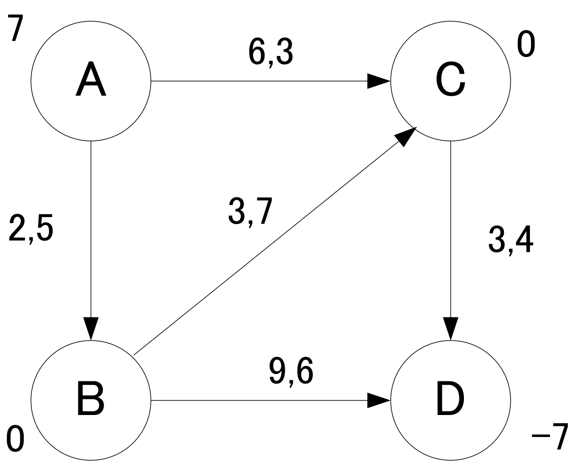
- 別名：負閉路除去法
  - 全ての制約条件を満たす初期フローからスタート
  - 得られているフローの残余ネットワークを構築
  - 長さが負の閉路＝________
    - これに沿って増加路を追加すると、総コストは______________
    - 閉路であるため、増加路を追加しても、流量は____________

クライン法(2)

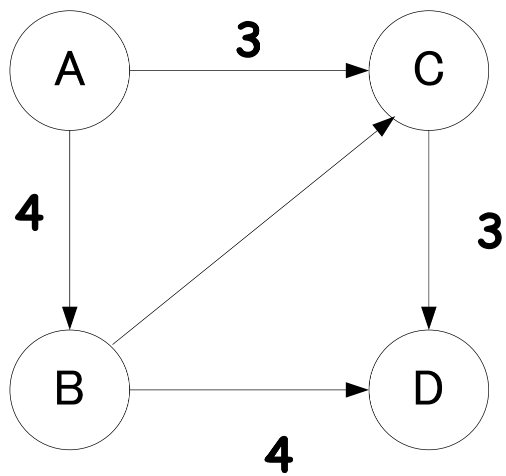
- (Step 1) 流れ保存則、容量制約条件を満たす初期フローに対して残余ネットワークを構成
- (Step 2) 残余ネットワークに対し、負閉路を探索。
- (Step 3) 負閉路に沿ってフローを流す。流す量は、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。Step 2に戻る。

クライン法(3)

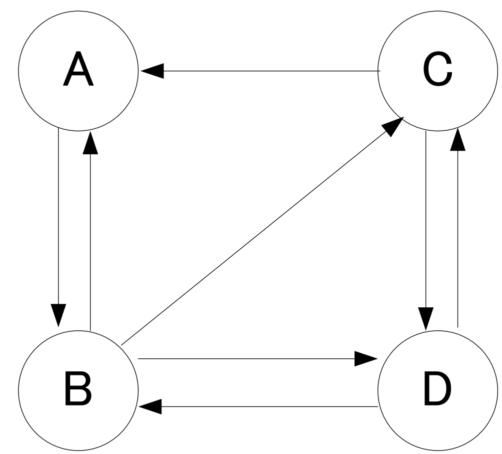
- (1)残余ネットワークに対する負閉路を探索すると、____________や____________が負閉路になっている。



現在計算中のネットワーク



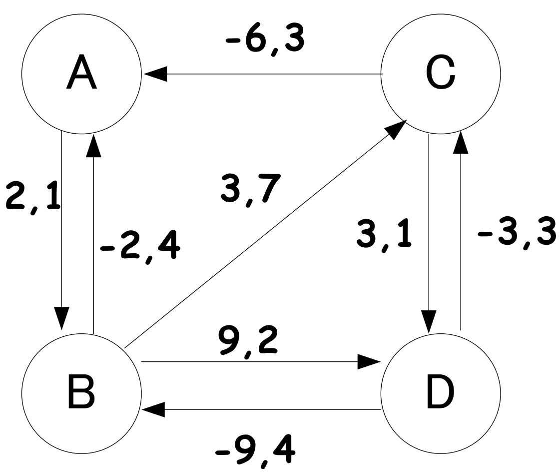
現在計算中のフロー



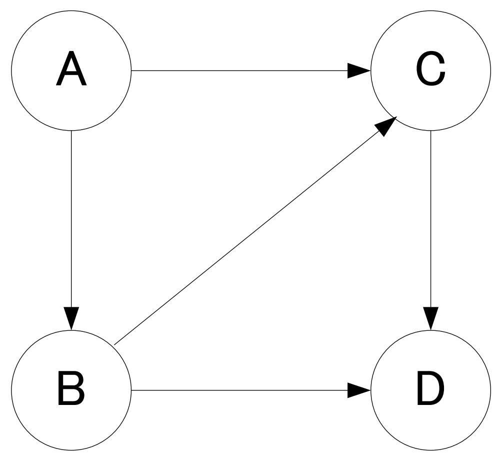
残余ネットワーク

クライン法（4）

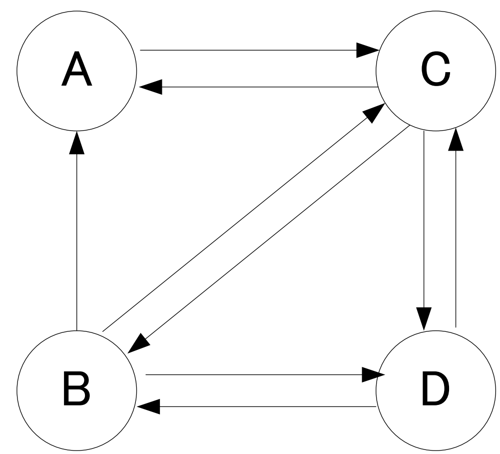
- （2）A→B→C→Aに着目すると、最小の経路容量は_____であるから、フローにこれを追加し、その残余ネットワークを計算



現在計算中のネットワーク



現在計算中のフロー



残余ネットワーク

ネットワーク計画法のまとめ

- 代表的ネットワーク最適化問題とその解法
  - 最短路問題・・・ダイクストラ法
  - 最大流問題・・・フロー増加法（ラベリング法）、プリフロープッシュ法
  - 最小費用流問題・・・バサッカー・ゴーウェン法、クライン法

フロイド・ワーシャル法（1）

- 経路長が負の経路に適用可能な最短路探索アルゴリズム
  - ダイクストラ法は適用不能

- ネットワーク$G=(V,E)$、枝$(i,j)\in E$の長さ＝a_{ij}（正とは限らない）

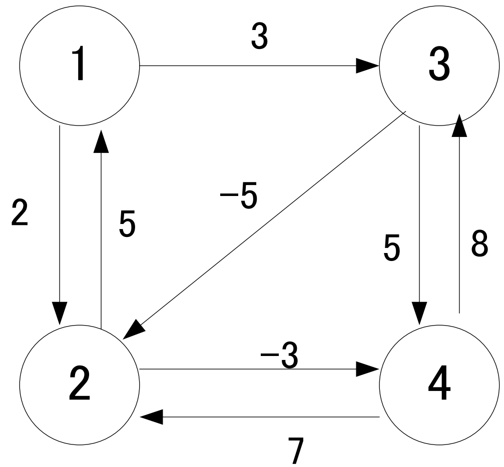
フロイド・ワーシャル法(2)

- (Step 0) 初期状態として、全ての$i,j \in V$に対して、$d(i,j)=a_{i,j}$, $p(i,j)=i$としておく。ただし、$d(i,i)=0$かつ、$(i,j) \notin E$ならば、$d(i,j)=\infty$とする。全ての$k \in V$に対し、Step 1を順に実施。
- (Step 1) 全ての$i(\neq k) \in V$と$j(\neq k) \in V$に対し

$$d(i,j) > d(i,k) + d(k,j) \text{ならば} \begin{cases} d(i,j) \leftarrow d(i,k) + d(k,j) \\ p(i,j) \leftarrow p(k,j) \end{cases}$$

- とする。

フロイド・ワーシャル法（3）



例：負の距離を持つ枝を含むネットワーク

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	4
i	1	0(1)	2(1)	3(1)	∞(1)
	2	5(2)	0(2)	∞(2)	-3(2)
	3	∞(3)	-5(3)	0(3)	5(3)
	4	∞(4)	7(4)	8(4)	0(4)

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	4
i	1	0(1)	2(1)	3(1)	∞(1)
	2	5(2)	0(2)	8(1)	-3(2)
	3	∞(3)	-5(3)	0(3)	5(3)
	4	∞(4)	7(4)	8(4)	0(4)

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	4
i	1	0(1)	2(1)	3(1)	-1(2)
	2	5(2)	0(2)	8(1)	-3(2)
	3	0(2)	-5(3)	0(3)	-8(2)
	4	12(2)	7(4)	8(4)	0(4)

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	4
i	1	0(1)	-2(3)	3(1)	-5(2)
	2	5(2)	0(2)	8(1)	-3(2)
	3	0(2)	-5(3)	0(3)	-8(2)
	4	8(2)	3(3)	8(4)	0(4)

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	4
i	1	0(1)	-2(3)	3(1)	-5(2)
	2	5(2)	0(2)	5(4)	-3(2)
	3	0(2)	-5(3)	0(3)	-8(2)
	4	8(2)	3(3)	8(4)	0(4)

フロイド・ワーシャル法(4)

- 負閉路を含む場合
  - kの選択順序によって解が不定
    - → 最短路の探索は不能
  - d(i,i)の値が0から変化
    - → 負閉路の存在検出可能

フロイド・ワーシャル法（５）

- 応用例
  - バサッカー・ゴーウェン法における残余ネットワーク上の最短路の探索
  - フロイド法における負閉路の探索